2. Une coïncidence

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Soit maintenant $f: PC^2 \to PC^2$ une application de degré $d \geqslant 2$; il suit de 1.1 qu'en déformant arbitrairement peu f on peut la rendre générique pour les singularités de Boardman d'ordre deux: on dira alors que f est « générique ». Si f est donc générique, ses seules singularités sont $\sum^1(f) = \{z \in PC^2 \mid \dim(\ker(df_z)) = 1\}$, qui est une courbe régulière, et $\sum^{1,1}(f) = \{z \in PC^2 \mid \ker(df_z) = T_z(\sum^1(f))\}$, qui est un ensemble fini de points (T_z désigne l'espace tangent au point z).

1.3. Proposition. *Soit* $f: PC^2 \to PC^2$ *une application générique de degré* d. *Alors* $\sum^1(f)$ *est une courbe régulière de degré* $3.(d-1)$ *et* $\sum^{1,1}(f)$ *est constitué de* $3.(4d-5).(d-1)$ *points.*

Démonstration: Soit $s \in H^2(PC^2)$ la classe d'Euler du fibré canonique et désignons par $N(f) = f^*(T(PC^2)) - T(PC^2)$ le fibré virtuel normal à f. On a que $c(T(PC^2)) = 1 + 3s + 3s^2$, où c désigne la classe de Chern totale, et $f^*(s) = d.s$. La classe duale à $\sum^1(f)$ est égale à

$$(*) \quad c_1(N(f)) = f^*(3s) - 3s = 3(d-1).s.$$

La classe duale à $\sum^{1,1}(f)$ est égale à

$$(**) \quad c_1^2(N(f)) + c_2(N(f)) = 3(d-1)(4d-5).s^2.$$

L'expression de ces classes duales est calculée par exemple dans [1]. On obtient les formules cherchées en évaluant (*) et (**) respectivement sur la classe fondamentale d'un hyperplan et sur la classe fondamentale de PC^2, ce qui revient à remplacer s par 1.

En fait, on se convainc facilement que pour toute application f de degré d le lieu singulier, qu'on désignera dorénavant par $\sum(f)$, a pour équation: $\text{dét}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=0,1,2} = 0$, ce qui définit bien une courbe de degré $3(d-1)$.

2. Une coïncidence

On se borne dorénavant aux applications de degré deux de PC^2 dans PC^2; l'ensemble $A^2(2,2)$ de ces applications est un ouvert de Zariski de PC^{17}, sur lequel opère $P(Gl(3, \mathbf{C})) \times P(Gl(3, \mathbf{C}))$, qui est de dimension 16; l'orbite générique a donc une codimension au moins égale à un. Le lieu singulier d'une telle application est une cubique; l'ensemble des cubiques de PC^2 s'identifie à PC^9. Si l'on fait agir $P(GL(3, \mathbf{C}))$ sur ces cubiques, l'orbite générique est de codimension un. On peut donc s'attendre à ce que si f est générique l'orbite de $\sum(f)$ détermine l'orbite de f à un nombre fini de choix près; les propositions qui suivent vont nous dire comment.

2.1. PROPOSITION. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application générique. Alors si* $p \in \sum^{1,1}(f)$, *la droite tangente à* $\sum(f)$ *en* p *recoupe* $\sum(f)$ *en un point d'inflexion.*

La démonstration de cette proposition est précédée de trois lemmes.

2.2. LEMME. Soit $g : PC^1 \to PC^2$ une application de degré deux. S'il existe $p \in PC^1$ tel que $dg_p = 0$, $g(PC^1)$ est une droite et il existe un et un seul point $q \neq p$ tel que $dg_q = 0$.

Démonstration: Si $dg_p = 0$, $g(PC^1)$ est une conique irréductible avec un point double: ce ne peut être qu'une droite double. $g : PC^1 \to g(PC^1)$ est une application générique de degré deux: dans ce cas elle a exactement deux points singuliers distincts.

2.3. LEMME. Soit $f : PC^2 \to PC^2$ de degré deux générique. Si $p \in \sum^{1,1}(f)$, il existe une et une seule droite $d \subset PC^2$ passant par p, telle que $d \cap \sum(f) = \{p, q_1, q_2\}$, p, q_1 et q_2 distincts, et telle que $d = \ker(df_{q_1}) = \ker(df_{q_2})$.

Démonstration: Soit $a \in H^2(\sum(f))$ la classe fondamentale en cohomologie de $\sum(f)$ et $b \in H^2(\sum(f))$ la classe duale à $\sum^{1,1}(f)$ dans $\sum(f)$; soit N le fibré normal à $\sum(f)$ dans PC^2 et $K = \ker(df)$, fibré de rang 1 sur $\sum(f)$. Puisque f est générique, on a: $b = 9 . a = c_1(N) - c_1(K)$; $\sum(f)$ étant une cubique, on a: $c_1(N) = 9 . a$. Ainsi $c_1(K) = 0$. Soit d' une droite ne passant pas par p et $g : \sum(f) \to d'$ l'application qui à $q \in \sum(f)$ associe $(p, q) \cap d'$, où (p, q) désigne la droite par p et q, et $(p, p) = T_p(\sum(f))$. $\sum(f)$ étant une cubique, $c_1(g^*(T(d'))) = 3 . a$; il s'en suit que $c_1(g^*(T(d'))) - c_1(K) = 6 . a$. On en déduit que le nombre de points singuliers comptés avec multiplicité du morphisme $G : K \to g^*(T(d'))$, donné par projection de K sur d' depuis p, est égal à 6. Le point p est une singularité de ce morphisme, mais sa multiplicité ne peut excéder 3, sans quoi f admettrait en p un point singulier non générique. Il doit donc exister un point q_1 distinct de p où G est singulier, ce qui revient à dire que $\ker(df_{q_1}) = (p, q_1)$ et $(p, q_1) \neq T_p(\sum(f))$. A cause du lemme 2.2 il doit exister q_2 distinct de q_1 tel que $(p, q_1) = \ker(df_{q_2})$; on a forcémment que $q_2 \neq p$, sans quoi $(p, q_1) = \ker(df_p) = T_p(\sum(f))$. On pose $d = (p, q_1)$; l'unicité de d suit du fait que G ne peut avoir plus de 6 points singuliers.

2.4. LEMME. Soient g et g': $PC^1 \to PC^2$ deux applications de degré deux. Alors:

(i) si g et g' coïncident en quatre points, elles coïncident partout;

(ii) si $g(PC^1)$ = une droite et g et g' coïncident en trois points, elles coïncident partout.

Ce lemme est un petit exercice dont la démonstration est laissée au lecteur.

Démonstration de 2.1. (voir fig. du §3): Soit $p \in \sum^{1,1}(f)$ et d la droite donnée par 2.4. La tangente à $\sum(f)$ en p recoupe $\sum(f)$ en un point i; on a que $i \neq p$, sans quoi la restriction de f à cette tangente serait en contradiction avec 2.2. Soit $e = f(d)$, qui est une droite d'après 2.2; $f^{-1}(e)$ est une conique contenant d, donc dégénérée en la réunion de d et une autre droite d'. Puisque $f(d') = e$, qui est une droite, $d' = (i, p)$, sans quoi on serait en contradiction avec l'unicité de d démontrée dans 2.3.; ainsi, $f(i) \in e$. Soit h: $PC^2 \to PC^2$ la symétrie de centre i qui laisse d fixe point par point. Soient $r \in PC^2 - (i, p) - d$, $r' = h(r)$ et H: $PC^2 \to PC^2$ la symétrie qui envoit $f(r)$ sur $f(r')$ et qui laisse e fixe point par point. Considérons l'application $g = H . f . h^{-1}$; on a que $f \mid d = g \mid d$, $f \mid (i, p) = g \mid (i, p)$ et $f \mid (r, r') = g \mid (r, r')$. Si $s \in \sum(f) - \sum^{1,1}(f)$, $f(\ker(df_s))$ est une droite et $g \mid \ker(df_s)$ coïncide avec $f \mid \ker(df_s)$ aux trois points d'intersection de $\ker(df_s)$ avec les droites d, (i, p) et (r, r'). On en déduit que $f = g$, en particulier h envoit $\sum(f)$ dans elle-même; i étant un point fixe de h, ce doit être un point d'inflexion, car ceux-cis sont en nombre impair et ils sont échangés par h.

2.5. COROLLAIRE. *Soient f et f' : $PC^2 \to PC^2$ deux applications de degré deux génériques. Si $\sum(f) = \sum(f')$ et $\sum^{1,1}(f) \cap \sum^{1,1}(f') \neq \varnothing$, alors il existe un automorphisme H: $PC^2 \to PC^2$ tel que $H . f' = f$, et $\sum^{1,1}(f) = \sum^{1,1}(f')$.*

Démonstration: Soit $p \in \sum^{1,1}(f) \cap \sum^{1,1}(f')$; posons $i = T_p(\sum(f)) \cap \sum(f)$. Il suit des hypothèses et de 2.1 qu'on a aussi $i = T_p(\sum(f')) \cap \sum(f')$. Les points q_1 et q_2 construits dans la démonstration de 2.1 coïncident pour f et f', puisqu'ils sont déterminés par le fait que $(i, q_1) = T_{q_1}(\sum(f))$, $(i, q_2) = T_{q_2}(\sum(f))$ et que $\sum(f) = \sum(f')$. Soit $r \in \sum(f)$, r distinct de i, p, q_1, q_2; soit H: $PC^2 \to PC^2$ l'automorphisme qui envoit $f'(p)$ sur $f(p)$ $f'(q_1)$ sur $f(q_1)$, $f'(q_2)$ sur $f(q_2)$ et $f'(r)$ sur $f(r)$. Puisque p, q_1 et q_2 sont alignés, on peut encore exiger que H envoie la droite $(f'(r), f'(r'))$ sur la droite $(f(r), f(r'))$, r' étant le symétrique de r pour la symétrie h construite dans la démonstration de 2.1. Puisque $f'^{-1}(f'(d)) = d \cup (i, p)$, f et $H.f'$coïncident sur d, sur (i, p) et sur (r, r'), donc elles coïncident partout.

Soit C une cubique non singulière de PC^2 et $i \in C$ un point d'inflexion. La classe de C étant 6, il existe en plus de $T_i(C)$, qui compte pour trois droites, trois autres droites distinctes passant par i et tangentes à C en des points r_1, r_2 et r_3.

2.6. Proposition. *Avec les notations ci-dessus, si* p *est l'un des points* r_1, r_2 *ou* r_3, *il existe une application générique* $f: PC^2 \to PC^2$ *telle que* $C = \sum(f)$ *et* $p \in \sum^{1,1}(f)$.

Démonstration: Soit $f_t = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$. On vérifie que si $t \neq -1$, f_t définit bien une application de PC^2 dans lui-même. Le lieu singulier de f_t a pour équation

$$z_0 . z_1 . z_2 . (8+2t) - 2t . (z_0^3 + z_1^3) - 2z_2^3 = 0 .$$

On vérifie que si $t \neq 0$ et $t \neq 8$ ce lieu est une cubique non singulière; on montrera sous 3.1. qu'il s'en suit que f_t est générique. On calcule que $i = (1, 1, 0)$ est un point d'inflexion de $\sum(f)$ et que les points p, q_1 et q_2 correspondants ont pour coordonnées: $p = (1/2, 1/2, 1)$, $q_1 = \big(-(s+1)^{-1}, -(s+1)^{-1}, 1\big)$, $q_2 = \big((s-1)^{-1}, (s-1)^{-1}, 1\big)$, où $s = (1+t)^{1/2}$, la racine ayant une détermination quelconque (changer de détermination revient à échanger q_1 et q_2). En prenant $s \neq 0, \pm 1, \pm 3$ on s'assure que $t \neq -1, 0$ et 8. On se propose de mettre l'équation de $\sum(f)$ en coordonnées inhomogènes ($z_2 = 1$) sous la forme

$$z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - B), \quad \text{où} \quad B \neq 0, 1,$$
$$\text{avec} \quad p = (0, 0, 1), \quad q_1 = (1, 0, 1), \quad q_2 = (B, 0, 1) .$$

Si $t = -4$, l'équation devient: $8z_0^3 + 8z_1^3 - 2z_2^3 = 0$. Après le changement de coordonnées

$$z_0 = z_2' - z_1' ; \quad z_1 = z_2' + z_1' ; \quad z_2 = z_0' . (i\sqrt{3} - 3) + 2z_2' ,$$

en omettant les primes, l'équation devient

$$A . z_1^2 = z_0 . (z_0 - 1) . (z_0 - 1/2 . (i\sqrt{3} + 1)), \quad \text{où} \quad A \neq 0 .$$

Après un changement de coordonnées évident, A est remplacée par 1.

Si $s \neq \pm i\sqrt{3}$, on aura $t \neq -4$. Pour mettre l'équation sous la forme voulue, il faut envoyer la tangente à $\sum(f)$ en i sur la droite $z_2 = 0$ et les points p, q_1 et q_2 respectivement sur $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ et $(B, 0, 1)$. Pour cela, il faut effectuer le changement de coordonnées

$$z_0' = \frac{(s-3)^2 \,.\, (s+1)}{(s+3) \,.\, (s^2+3)} \,.\, (z_2 - z_1 - z_0)\,; \quad z_1' = 1/2 \,.\, (z_1 - z_0)\,;$$

$$z_2' = \frac{3\,(s^2-1)}{s^2+3} \,.\, (z_0 + z_1) + z_2 \,.$$

Après omission des primes, l'équation de $\sum(f)$ devient

$$A \,.\, z_1^2 = z_0 \,.\, (z_0 - 1) \,.\, (z_0 - B)\,, \quad \text{où} \quad B = \frac{(s+1) \,.\, (s-3)^3}{(s-1) \,.\, (s+3)^3}$$

On peut supposer que l'équation de la cubique C donnée soit $z_1^2 = z_0 \,.\, (z_0 - 1) \,.\, (z_0 - b)$, où $b \neq 0, 1$, et que $p = (0, 0, 1)$. Les valeurs interdites de s sont $s = 0$, qui donne $B = 1$; $s = -1$, d'où $B = 0$ et $s = i\sqrt{3}$, d'où $B = ½ \,.\, (i\sqrt{3} + 1)$. Ce dernier cas se ramène au cas où $t = -4$. Sinon, on peut résoudre par rapport à s dans l'équation

$$b = \frac{(s+1) \,.\, (s-3)^3}{(s-1) \,.\, (s+3)^3}\,,$$

puis on pose $t = s^2 - 1$ et f_t est alors l'application cherchée.

Ainsi, d'après 2.5 et 2.6, la cubique non singulière C détermine l'orbite de l'application f telle que $\sum(f) = C$, au choix près de $p \in \sum^{1,1}(f)$ parmi les points r_1, r_2 et r_3 de C.

2.7. *Remarque.* Soit C la cubique d'équation $z_1^2 = z_0 \,.\, (z_0 - 1) \,.\, (z_0 - b)$; l'automorphisme de $P\mathbf{C}^2 : (z_0, z_1, z_2) \to (z_0, -z_1, z_2)$ laisse C invariante. On obtient de manière analogue d'autres tels automorphismes en envoyant chacun des neuf points d'inflexion de C sur $(0, 1, 0)$; on engendre ainsi un groupe G à 18 éléments. Il est bien connu qu'en général ce groupe est celui de tous les automorphismes de $P\mathbf{C}^2$ qui laissent C invariante, à deux exceptions près. La première, c'est lorsque les points 0, 1 et $b \in C$ peuvent être envoyés, par une transformation du type $z \to az + A$, sur les trois racines troisièmes de l'unité, ce qui équivaut à dire que $b = ½ \,.\, (i\sqrt{3} + 1)$; c'était le cas de $\sum(f_t)$ pour $t = -4$. Dans ce cas il faut ajouter à G le groupe d'ordre 3 engendré par

$$(z_0, z_1, z_2) \to \left(z_0 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, (i\sqrt{3} - 1), z_1, z_2\right)$$

(ce qui équivaut aux permutations cycliques des racines troisième de l'unité), et cela donne en tout un groupe d'ordre 54. La deuxième exception est lorsque $b = -1$; dans ce cas, auquel appartient $\sum(f_t)$ lorsque $t = -10 \pm \sqrt{108}$, il faut ajouter à G le groupe d'ordre deux engendré par $(z_0, z_1, z_2) \to (-z_0, i.z_1, z_2)$ et on obtient en tout un groupe d'ordre 36.

Pour la détermination du groupe des automorphismes qui laissent invariante une cubique, on peut consulter [2], pages 84 et 85.

3. Classification

Considérons la famille d'applications

$$f_T(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + t_0 \, . \, z_1 \, . \, z_2, \; z_1^2 + t_1 \, . \, z_0 \, . \, z_2, \; z_2^2 + t_2 \, . \, z_0 \, . \, z_1)\,,$$
$$\text{où} \quad T = (t_0, t_1, t_2)\,;$$

on vérifie que f_T définit bien une application de PC^2 dans lui-même à condition que $t_0 \, . \, t_1 \, . \, t_2 \neq -1$. On va distinguer dans cette famille quatre cas:

I) t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$ et $t_0 \, . \, t_1 \, . \, t_2 \neq 8$. Après changement de coordonnées à la source: $z_0 = t_0^{2/3} \, . \, t_1^{1/3} \, . \, z_0'$, $z_1 = t_0^{1/3} \, . \, t_1^{2/3} \, . \, z_1'$, $z_2 = z_2'$, et au but: $w_0' = t_0^{-4/3} \, . \, t_1^{-2/3} \, . \, w_0$, $w_1' = t_0^{-2/3} \, . \, t_1^{-4/3} \, . \, w_1$, $w_2' = w_2$, en omettant les primes et en posant $t = t_0 \, . \, t_1 \, . \, t_2$, on retrouve la famille $f_t^I(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$ déjà vue dans la démonstration de 2.6. Puisque $t \neq -1, 0, 8$, le lieu singulier de f_t^I est une cubique non singulière.

II) $t_0 = 0$, t_1 et $t_2 \neq 0$. Après un changement de coordonnées on est ramené à la forme $f^{II}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1)$. Le lieu singulier a pour équation $2z_0 \, . \, (4z_1 . z_2 - z_0^2) = 0$; c'est l'intersection d'une droite et d'une conique qui lui est transverse. Aux points d'intersection, le noyau de df est de dimension un et parallèle à la droite $z_0 = 0$. Signalons que le cas t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$, $t_0 \, . \, t_1 \, . \, t_2 = 8$, qui a été exclu sous I, se ramène au cas II après un changement de coordonnées convenable.

III) $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 \neq 0$. Se ramène à

$$f^{III}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2 + z_0 \, . \, z_1)\,.$$

Le lieu singulier a pour équation $z_0 \, . \, z_1 \, . \, z_2 = 0$; c'est la réunion des trois droites d_0, d_1, d_2 d'équation respectivement $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. En $d_0 \cap d_1$ ker (df) est de dimension deux; en $d_0 \cap d_2$ il est de dimen-