3. Classification

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

(ce qui équivaut aux permutations cycliques des racines troisième de l'unité), et cela donne en tout un groupe d'ordre 54. La deuxième exception est lorsque $b = -1$; dans ce cas, auquel appartient $\sum (f_t)$ lorsque $t = -10 \pm \sqrt{108}$, il faut ajouter à G le groupe d'ordre deux engendré par $(z_0, z_1, z_2) \to (-z_0, i.z_1, z_2)$ et on obtient en tout un groupe d'ordre 36.

Pour la détermination du groupe des automorphismes qui laissent invariante une cubique, on peut consulter [2], pages 84 et 85.

3. Classification

Considérons la famille d'applications

$$f_T(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + t_0 \,.\, z_1 \,.\, z_2,\ z_1^2 + t_1 \,.\, z_0 \,.\, z_2,\ z_2^2 + t_2 \,.\, z_0 \,.\, z_1)\,,$$
$$\text{où} \quad T = (t_0, t_1, t_2)\,;$$

on vérifie que f_T définit bien une application de PC^2 dans lui-même à condition que $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 \neq -1$. On va distinguer dans cette famille quatre cas:

I) t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$ et $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 \neq 8$. Après changement de coordonnées à la source: $z_0 = t_0^{2/3} \,.\, t_1^{1/3} \,.\, z_0'$, $z_1 = t_0^{1/3} \,.\, t_1^{2/3} \,.\, z_1'$, $z_2 = z_2'$, et au but: $w_0' = t_0^{-4/3} \,.\, t_1^{-2/3} \,.\, w_0$, $w_1' = t_0^{-2/3} \,.\, t_1^{-4/3} \,.\, w_1$, $w_2' = w_2$, en omettant les primes et en posant $t = t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2$, on retrouve la famille $f_t^I(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2 + z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + t . z_0 . z_1)$ déjà vue dans la démonstration de 2.6. Puisque $t \neq -1, 0, 8$, le lieu singulier de f_t^I est une cubique non singulière.

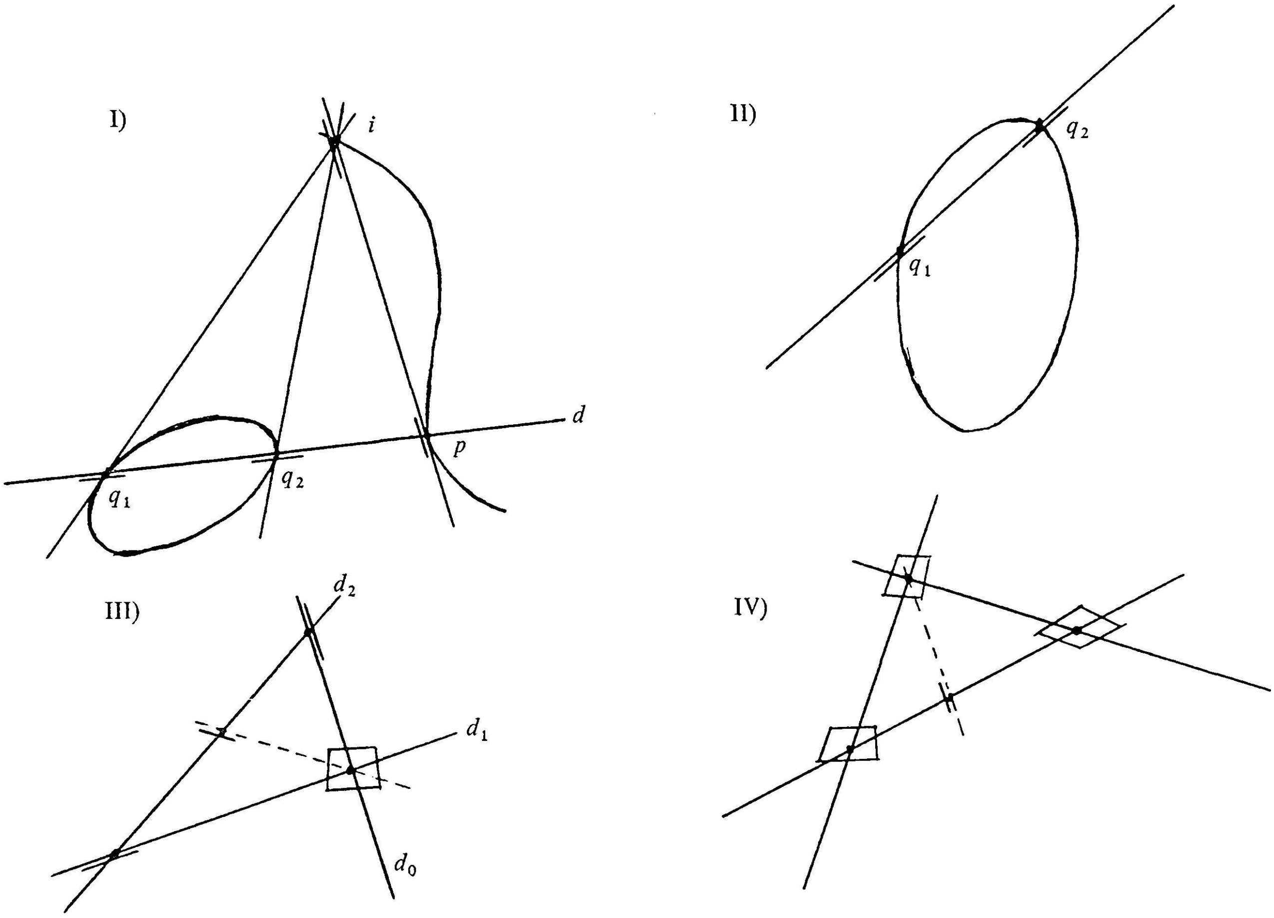
II) $t_0 = 0$, t_1 et $t_2 \neq 0$. Après un changement de coordonnées on est ramené à la forme $f^{II}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1)$. Le lieu singulier a pour équation $2z_0 \,.\, (4z_1 . z_2 - z_0^2) = 0$; c'est l'intersection d'une droite et d'une conique qui lui est transverse. Aux points d'intersection, le noyau de df est de dimension un et parallèle à la droite $z_0 = 0$. Signalons que le cas t_0, t_1 et $t_2 \neq 0$, $t_0 \,.\, t_1 \,.\, t_2 = 8$, qui a été exclu sous I, se ramène au cas II après un changement de coordonnées convenable.

III) $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 \neq 0$. Se ramène à

$$f^{III}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2 + z_0 \,.\, z_1)\,.$$

Le lieu singulier a pour équation $z_0 \,.\, z_1 \,.\, z_2 = 0$; c'est la réunion des trois droites d_0, d_1, d_2 d'équation respectivement $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. En $d_0 \cap d_1$ ker (df) est de dimension deux; en $d_0 \cap d_2$ il est de dimension un, parallèle à d_0, en $d_1 \cap d_2$ il est aussi de dimension un, parallèle à d_1.

IV) $t_0 = t_1 = t_2, f^{IV}(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2, z_2^2)$. Le lieu singulier est le même que sous III, mais aux points d'intersection $d_i \cap d_j$, $i \neq j$, ker (df) est toujours de dimension deux.



Allure des lieux singuliers: Les traits $//$ ou les petits carrés $\boxed{\cdot}$ indiquent les noyaux.

3.1. Théorème. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application de degré deux non constante.* f *est équivalente à l'une des applications de* I *à* IV.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il ne peut arriver que $f^{-1}(p)$ = courbe, où p est un point, car alors, si d est une droite ne contenant pas p, $f^{-1}(p)$ et $f^{-1}(d)$ seraient deux courbes d'intersection vide.

Supposons que $\sum(f)$ ait pour équation $z_1^2 \,.\, z_2 = z_0^3$ et que ker (df_p), où $p = (0, 0, 1)$, soit de dimension un et distinct de la droite $z_1 = 0$. Soit $p_n = (1/n^2, 1/n^3\ 1)$, $q_n = (1/n^2, -1/n^3, 1)$; on a que $p_n \to p$, $q_n \to p$ ker $(df_{p_n}) \to$ ker (df_p), ker $(df_{q_n}) \to$ ker (df_p). On en déduit facilement que la deuxième dérivée de la restriction de f à la droite ker (df_p) serait nulle, donc cette restriction serait elle-même constante, ce qui est impossible. Donc ker (df_p) doit contenir la droite $z_1 = 0$; mais alors cette droite rencontre $\sum(f)$ seulement en p et $f \mid$ ker (df_p) aurait p comme seul point singulier, ce qui contredit le lemme 2.2.

On déduit de ce qui précède que le lieu singulier de f ne peut pas être une cubique avec un point cuspidal. Un raisonnement analogue permet d'exclure le cas où f aurait comme lieu singulier une cubique avec point double, où encore la réunion d'une conique et d'une droite qui lui est tangente.

Cas I. Supposons que $\sum(f)$ soit une cubique non singulière; on va d'abord en déduire que f est générique. Puisque l'équation de $\sum(f)$, dét $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=0,1,2} = 0$ définit une courbe non singulière, f est $\sum^1$ et $\sum^2$ transverse. Si $p \in \sum^{1,1}(f)$, la restriction de f à ker (df_p) ne peut être constante et sa dérivée en p doit donc s'annuller à l'ordre 1. Ainsi f est $\sum^{1,1}$ — transverse. En résumé, f est générique. Les propositions 2.5. et 2.6. permettent de conclure que f est équivalente à f_t^I pour un t convenable.

Cas II. Supposons que le lieu singulier de f soit constitué d'une conique C et d'une droite d qui lui est transverse. Posons $C \cap d = \{q_1, q_2\}$. On doit avoir que ker $(df_{q_i}) = d$, $i = 1, 2$, sans quoi on en concluerait que $f \mid$ ker (df_{q_i}) serait constante. Pour presque tout $r \in d - \{q_1, q_2\}$ ker (df_r) recoupe C en deux points distincts s_1 et s_2, qu'on numérote de sorte que ker (df_{s_1}) = ker $(df_r) = (s_1, s_2)$. Soit f' une autre application ayant pour lieu singulier la réunion d'une droite et d'une conique, et soient q_1', q_2', r', s_1' et s_2' les points construits de manière analogue pour f'. Soit h l'automorphisme de PC^2 qui envoit q_i' sur q_i et s_i' sur s_i, et soit H l'automorphisme qui envoit $f'(q_i')$ sur $f(q_i)$ et $f'(s_i')$ sur $f(s_i)$; $f'' = H . f' . h^{-1}$ et f coïncident sur les droites d et (s_1, s_2). Les fibrés ker (df) et ker (df'') coïncident sur d, car ils coïncident en r, q_1 et q_2; alors, si $p \in d - \{q_1, q_2\}$, $f \mid$ ker (df_p) et $f'' \mid$ ker (df_p) coïncident aux deux points de ker $(df_p) \cap C$, ainsi que leur dérivées en p. D'après 2.4., elles doivent coïncider sur ker (df_p); il s'en suit que $f = f''$. En particulier, f est équivalente à f^{II}.

Cas III et IV. Si le lieu singulier de f est composé de trois droites distinctes d_0, d_1 et d_2, ces droites ne peuvent se rencontrer en un seul point p. Car alors f serait constante sur toute droite passant par p distincte de d_0, d_1 ou d_2. Posons: $d_0 \cap d_1 = p_2$, $d_1 \cap d_2 = p_0$ et $d_0 \cap d_2 = p_1$. On se convainc facilement que pour les noyaux en p_0, p_1 ou p_2 les seules possibilités sont celles rencontrées pour f^{III} ou f^{IV}. On montre l'équivalence de f et f^{III} ou f^{IV} en faisant coïncider les lieux singuliers et leurs images. Dans ces cas pour le choix de l'équivalence on a un degré de liberté dans le cas III, deux degrés dans le cas IV.

Il est clair que si f est équivalente à l'une des applications du type I à IV, elle ne peut être équivalente à une application d'un autre type. Cela a donc un sens de dire que f est de type I, II, III ou IV.

3.2. *Définition.* Les applications f_0 et $f_1 : PC^2 \to PC^2$ sont dites C^∞-équivalentes s'il existe une famille d'applications $f_s : PC^2 \to PC^2$, où s est un nombre réel compris entre 0 et 1, faisant passer de f_0 à f_1, $f_s(z)$ étant polynômiale par rapport à z et différentiable par rapport à s, la famille étant différentiablement triviale. C'est dire qu'il existe des familles de difféomorphismes h_s et H_s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, de PC^2 en tant que variété C^∞, tels que $f_0 = H_s . f_s . h_s^{-1}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

3.3. THÉORÈME. *Si f et g sont des applications de degré deux de PC^2 dans PC^2 de même type* II, III *ou* IV, *elles sont équivalentes. Si elles sont de type* I, *elles sont C^∞-équivalentes.*

Démonstration: Si f est de type II, III ou IV l'affirmation suit de la démonstration de 3.1.

Si f est de type I, désignons par $\Phi(PC^2)$ et $\Phi(f)^h$ respectivement les champs de vecteurs C^∞ sur PC^2 et les champs de vecteurs holomorphes le long de f; $\Phi(PC^2)_x$ et $\Phi(f)_x^h$ désignent les germes de tels champs en x. On a:

(i) $df(\Phi(PC^2)_x) + f^*(\Phi(PC^2)_{f(x)}) \supset \Phi(f)_{f(x)}^h$ pour tout $x \in PC^2$

(ii) $f \mid \sum(f)$ est injective.

(i) suit du fait que f est générique et donc localement stable (on pourrait mettre partout des champs holomorphes). (ii) suit du fait que, $\sum(f)$ étant une cubique, $f \mid \sum(f)$ doit avoir 9 points doubles, qui en l'occurence sont dégénérés en les 9 points de $\sum^{1,1}(f)$, et pas plus.

Il suit de (i) et (ii), en recollant par partitions de l'unité, que $df(\Phi(PC^2)) + f^*(\Phi(PC^2)) \supset \Phi(f)^h$. Par un théorème du type du théorème de Mather, qui est élémentaire dans nos circonstances, on en déduit que toute déformation assez petite de f dans les applications holomorphes est différentiablement triviale. Donc f est C^∞-équivalente aux applications qui lui sont proches. L'affirmation que f et g sont C^∞-équivalentes suit du fait que les applications de type I forment un ouvert de Zariski, donc connexe, de $P\mathbf{C}^{17}$.

4. Groupes d'isotropie

Soit f: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$. On pose $G_f = \{(h, H) \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \mid H . f . h^{-1} = f\}$. On va déterminer G_f lorsque f est de degré deux; sauf si f est de type deux, il se trouve que si h est un automorphisme qui laisse invariantes les singularités de f, il existe un unique H tel que $(h, H) \in G_f$.

4.1. Proposition. I) *Si* $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *le groupe d'isotrophie de* f_t^I *est engendré par les paires*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & v^2 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où u *et* v *sont les solutions de* $u^3 = t$ *et* $v^3 = 1$. *En fait, la troisième paire s'écrit comme composition des deux premières. Ce groupe est d'ordre* 18.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *on peut ajouter la paire* (h, H), *où* h *est l'automorphisme qui s'écrit, dans les coordonnées introduites sous* 2.6., $(z_0, z_1, z_2) \to (z_0, i . z_1, z_2)$, *et* H *est construit selon le corollaire* 2.5. *appliqué à* $f_t . h^{-1}$ *et* f_t *afin que* $H . f_t . h^{-1} = f_t$. *Le groupe d'isotropie est ici d'ordre* 36.

II) *Le groupe d'isotropie de* f^{II} *est engendré par :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $v^3 = 1$. *Il est d'ordre 6.*