

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN
PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME

Kapitel: 4. Groupes d'isotropie

Autor: Ronga, Felice

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48175>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ment triviale. Donc f est C^∞ -équivalente aux applications qui lui sont proches. L'affirmation que f et g sont C^∞ -équivalentes suit du fait que les applications de type I forment un ouvert de Zariski, donc connexe, de PC^{17} .

4. GROUPES D'ISOTROPIE

Soit $f: PC^2 \rightarrow PC^2$. On pose $G_f = \{(h, H) \in \text{Aut}(PC^2) \times \text{Aut}(PC^2) \mid H \cdot f \cdot h^{-1} = f\}$. On va déterminer G_f lorsque f est de degré deux; sauf si f est de type deux, il se trouve que si h est un automorphisme qui laisse invariantes les singularités de f , il existe un unique H tel que $(h, H) \in G_f$.

4.1. PROPOSITION. I) Si $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, le groupe d'isotropie de f_t^I est engendré par les paires

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & u^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & v^2 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où u et v sont les solutions de $u^3 = t$ et $v^3 = 1$. En fait, la troisième paire s'écrit comme composition des deux premières. Ce groupe est d'ordre 18.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, on peut ajouter la paire (h, H) , où h est l'automorphisme qui s'écrit, dans les coordonnées introduites sous 2.6., $(z_0, z_1, z_2) \rightarrow (z_0, i \cdot z_1, z_2)$, et H est construit selon le corollaire 2.5. appliqué à $f_t \cdot h^{-1}$ et f_t afin que $H \cdot f_t \cdot h^{-1} = f_t$. Le groupe d'isotropie est ici d'ordre 36.

II) Le groupe d'isotropie de f^{II} est engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $v^3 = 1$. Il est d'ordre 6.

III) Le groupe d'isotropie de f^{III} est engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où x est un nombre complexe non nul.

IV) Le groupe d'isotropie de f^{IV} est engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix} \text{ et } (A_s, A_s),$$

où x et y sont des nombres complexes non nuls et $A_s(z_0, z_1, z_2) = (z_{s(0)}, z_{s(1)}, z_{s(2)})$, où s parcourt les permutations de $(0, 1, 2)$.

Démonstration: On vérifie que les automorphismes décrits laissent invariantes les applications en question.

I) Si $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ et $t \neq -4$, il ne peut y avoir d'autres automorphismes laissant f_t^I invariante, puisque la projection du groupe décrit sur le premier facteur de $\text{Aut}(PC^2) \times \text{Aut}(PC^2)$ donne tous les automorphismes qui laissent $\sum (f_t^I)$ invariante (voir remarque 2.7). Si $t = -4$, on a des automorphismes supplémentaires, mais ils ne laissent pas $\sum^{1,1} (f_t^I)$ invariant et ne donnent donc rien de nouveau.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ par contre, l'automorphisme qui échange q_1 et q_2 (notations de 2.7) laisse $p \in \sum^{1,1} (f_t^I)$ fixe et donne lieu, ainsi qu'on l'a énoncé, à un nouvel élément de $G_{f_t^I}$.

Pour II, III et IV les affirmations se vérifient facilement.

4.2. THÉORÈME. Soit $f : PC^2 \rightarrow PC^2$ une application de degré deux. Si f est de type I, elle est C^∞ -stable. Si elle est de type III ou IV, elle est stable dans les applications G_f -équivariantes.

Si elle est de type II, elle n'est pas G_f -stable.

Démonstration: Les applications de type I forment un ouvert; leur C^∞ -stabilité suit alors de 3.3.

Si f est de type III, son groupe d'isotropie est de dimension un et son lieu singulier est la réunion de trois droites d_0, d_1 et d_2 . Si g est G_f équivariante, son groupe d'isotropie est de dimension un ou deux. Supposons que $\dim(\ker(df_p)) = 1$, où $p = d_0 \cap d_1$; si g est assez proche de f , $\dim(\ker(dg_q)) \leq 1$, pour q dans un voisinage de p , donc g ne peut être de type IV et doit donc être de type III.

Si f est de type IV, son groupe d'isotropie est de dimension deux, de même que pour toute autre application g G_f -équivariante. g doit donc être aussi de type IV.

Si

$$f(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 \cdot z_2, z_2^2 + z_0 \cdot z_1),$$

l'application

$$(z_0^2 + t \cdot z_1 \cdot z_2, z_1^2 + z_0 \cdot z_2, z_2^2 + z_0 \cdot z_1),$$

pour t petit, est proche de f et G_f -équivariante, mais de type I, donc non équivalente à f .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RONGA, F. Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 47, 1 (1972), pp. 15-35.
- [2] VAN DER WAERDEN, B.L. *Einführung in die algebraische Geometrie*. Zweite Auflage, Springer Verlag, 1973.

(Reçu le 15 octobre 1975)

Felice Ronga

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24