4. Étude d'un exemple

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

[Notons qu'il n'est pas question, au départ, d'*événements* indépendants, mais de *phénomènes* (réduits) indépendants; les « événements » indépendants correspondent en fait aux partitions du type $\{ A, \complement A \}$; en termes de situation: le phénomène $\mathfrak{A}$ est $\mathfrak{F}$ réduit au point qu'on n'observe plus rien que l'occurrence ou la non-occurrence de A; il en est de même pour $\mathfrak{B}$, et on exprime que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont sans interaction mutuelle].

Il est clair que, ainsi référées à la situation sous-jacente, les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance sont autrement riches de sens que les simples définitions formelles

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr B}, \qquad \Pr(A \cap B) = \Pr A \,.\, \Pr B \,.$$

C'est cette richesse qui permet leur utilisation; s'en tenir à un exposé formel, et s'attendre néanmoins que les élèves seront à même de l'appliquer, c'est se fier à une pure et simple régression du stade B au stade A: il vaudrait certes mieux, dans ce cas, supprimer le stade B.

4. Étude d'un exemple

a. Revenons à l'exemple du paragraphe 3.b; le phénomène fortuit $\mathfrak{F}$ considéré est donc le suivant:

une suite de parties de « pile ou face » poursuivie jusqu'à la première apparition soit de *PPF* soit de *PFP*.

Voilà une situation aléatoire qu'il s'agit de mathématiser en faisant apparaître, successivement, l'ensemble des possibles, Ω, l'ensemble des événements à considérer, $\mathscr{T}$, et la fonction-probabilité.

b. L'ensemble des possibles peut être « décrit » en extension, sous la forme

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & PPF, FPPF, PPPF, FFPPF, FPPPF, PPPPF, PFFPPF, \ldots \\ & PFP, FPFP, FFPFP, FFFPFP, PFFPFP, \ldots \} \end{aligned}$$

mais cette manière est bien peu « déductive »!; il peut aussi être décrit en compréhension:

ensemble des « *mots* » formés des seules lettres P et F et terminés à la première apparition soit de la séquence *PPF* soit de la séquence *PFP*

et des *suites* formées des seules lettres P et F et qui ne contiennent aucune séquence *PPF* ou *PFP*.

A ces descriptions, correctes mais peu intéressantes, on préférera sans doute une représentation géométrique. La plus immédiate est l'arbre qui correspond à la description en extension signalée ci-dessus:

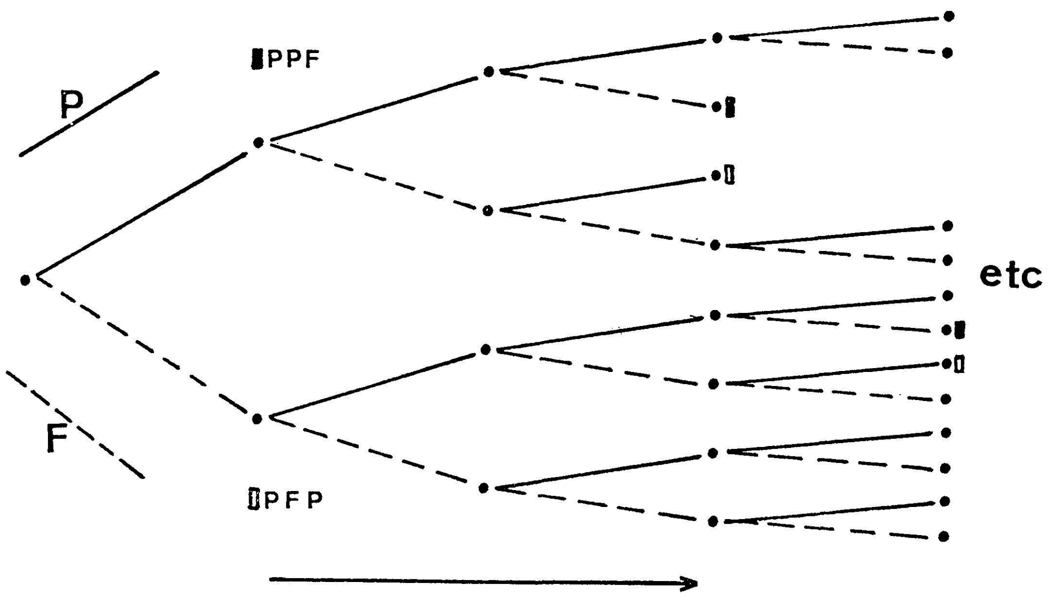


Fig. 2

Cette représentation est, elle aussi, fort compliquée. On trouvera peut-être convenable de la simplifier en tenant compte du degré de réalisation des états finals, de sorte que le système ne peut être que dans les états *S*, *P*, *PP*, *PF*, *PPF*, *PFP*; on a ainsi la représentation géométrique que voici:

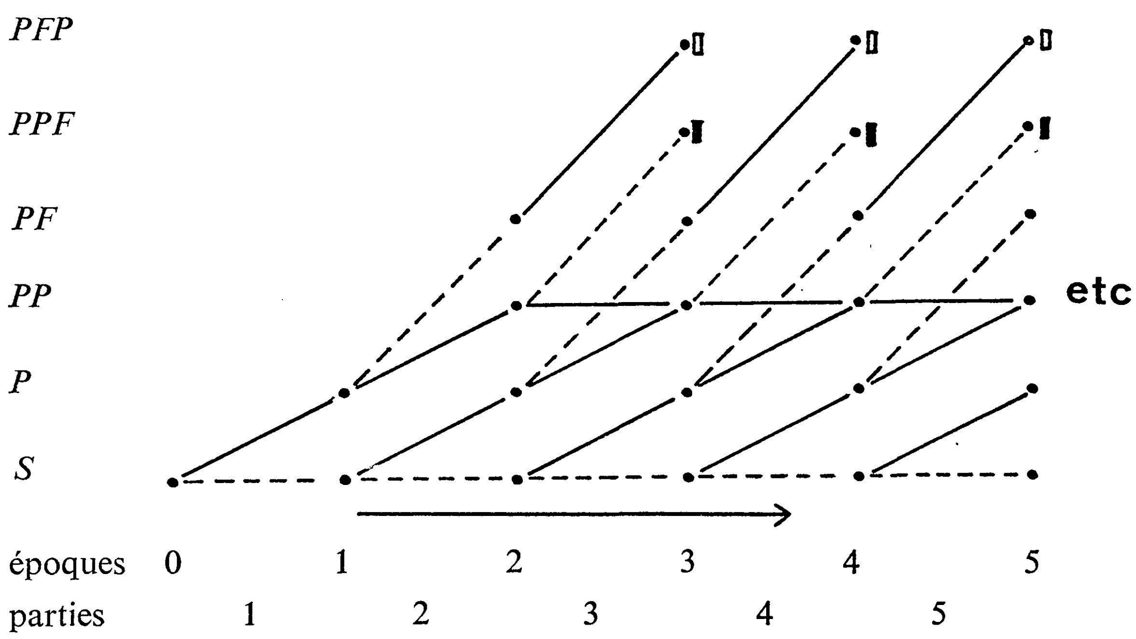


Fig. 3

Au stade *A*, on habitue volontiers les élèves à simplifier davantage encore, en faisant abstraction des époques auxquelles les états sont atteints: on a ainsi la représentation de la figure 1.

Il semble que, comme représentation de Ω, les trois figures (2), (3), et (1) sont également acceptables, et que, par raison de simplicité, (1) est meilleure que (3) et (3) meilleure que (2). C'est là une grave et dangereuse illusion, comme on le verra en d. ci-dessous.

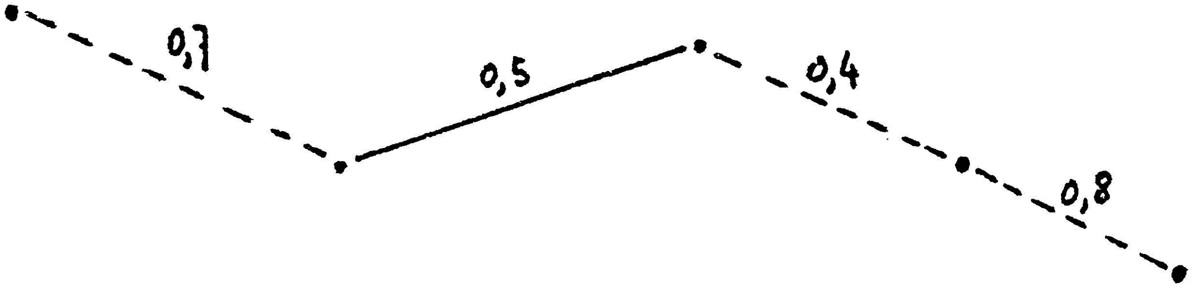
c. L'ensemble $\mathscr{T}$ des événements observables n'a pas besoin d'être décrit en détail: il suffit de remarquer qu'il contient tous les « débuts », c'est-à-dire tous les ensembles d'éléments de Ω qui ont une partie initiale donnée; par exemple,

deb (*FFFPFP*) [qui est un singleton de Ω]
deb (*FFPFFF*) [qui contient une infinité de singletons de Ω, par exemple *FFPFFFPPF* et *FFPFFFPFP*]
deb (*FFPPPP*) [qui contient les singletons *FFPPPPF*, *FFPPPPPF*, *FFPPPPPPF*, *FFPPPP* … *PPF*, etc.]

ainsi que leurs complémentaires, unions, et intersections.

d. En ce qui concerne la probabilité définie sur un tel ensemble de possibles, il est très important qu'un premier enseignement déductif fasse clairement ressortir les points suivants:

1) il y a beaucoup de définitions de Pr qui sont *mathématiquement* possibles
2) chacune d'elles peut s'obtenir en plaçant sur chaque branche de l'arbre (fig. 2) un nombre compris entre 0 et 1 et définissant la probabilité d'un début (singleton ou non) comme produit des nombres portés par les branches qui le constituent; ainsi on pourrait avoir:



$0{,}7 = p_F$ $\quad$ $0{,}5 = p_{(F)P}$ $\quad$ $0{,}4 = p_{(FP)F}$ $\quad$ $0{,}8 = p_{(FPF)F}$

$$\text{Pr deb } (FPFF) = 0{,}7 \times 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}112$$

Fig. 4

(les deux branches issues d'un même point doivent porter des nombres dont la somme est 1: c'est une conséquence de K1)

3) le choix de l'une de ces probabilités n'est possible que par une analyse de la situation elle-même, et plusieurs choix différents sont manifestement possibles, même en s'en tenant aux situations simples.

Montrer que le procédé multiplicatif mentionné en 2) donne bien une probabilité peut être l'occasion d'un commentaire éclairant sur la portée d'une axiomatique: pour qu'une application de $\mathscr{T}$ dans $\mathbf{R}^+$ soit une probabilité, il suffit qu'elle satisfasse aux axiomes K1, K2, et K3 du paragraphe 3d. ci-dessus; or, on a

$$\Pr \Omega = \Pr [\operatorname{deb}(P) \cup \operatorname{deb}(F)] = \Pr \operatorname{deb}(P) + \Pr \operatorname{deb}(F) = 1$$

et aussi (quels que soient $x, y, ..., u$):

$$[\operatorname{deb}(x, y, \ldots, u, P) \cup \operatorname{deb}(x, y, \ldots, u, F)] = \operatorname{deb}(x, y, \ldots, u)$$
$$[\operatorname{deb}(x, y, \ldots, u, P) \cap \operatorname{deb}(x, y, \ldots, u, F)] = \phi$$

$$\begin{aligned} &\Pr \operatorname{deb}(x, y, \ldots, u, P) + \Pr \operatorname{deb}(x, y, \ldots, u, F) \\ &= p_x \times p_{(x)y} \times \ldots \times p_{(x,y,\ldots)u} \times p_{(x,y,\ldots,u)P} \\ &+ p_x \times p_{(x)y} \times \ldots \times p_{(x,y,\ldots)u} \times p_{(x,y,\ldots,u)F} \\ &= p_x \times p_{(x)y} \times \ldots \times p_{(x,y,\ldots)u} = \Pr \operatorname{deb}(x, y, \ldots, u) . \end{aligned} \tag{7}$$

Quant à l'axiome K3, il n'est pas facile de démontrer qu'il est vérifié; le conflit ainsi mis à jour entre l'intuition d'un procédé (multiplicatif) auquel les élèves sont accoutumés et l'apparente évidence de K3 est, lui aussi, très instructif. D'autre part, montrer que le procédé multiplicatif définit *toutes* les probabilités possibles résulte de la théorie des probabilités composées; par exemple

$$\begin{aligned} \Pr \operatorname{deb}(x, y, z) &= \Pr \operatorname{deb}(x) \,.\, \Pr [\operatorname{deb}(x, y) \mid \operatorname{deb}(x)] \,. \\ &\quad .\ \Pr [\operatorname{deb}(x, y, z) \mid \operatorname{deb}(x) \cap \operatorname{deb}(x, y)] \\ &= \Pr \operatorname{deb}(x) \,.\, \Pr [\operatorname{deb}(x, y) \mid \operatorname{deb}(x)] \,. \\ &\quad .\ \Pr [\operatorname{deb}(x, y, z) \mid \operatorname{deb}(x, y)] \\ &\quad [\text{car } \operatorname{deb}(x, y, z) \subset \operatorname{deb}(x, y) \subset \operatorname{deb}(x)] . \end{aligned}$$

Des situations concrètes correspondant à ces diverses possibilités devraient être montrées aux élèves dès le stade *A*. Il semble bien qu'à l'heure actuelle on l'oublie fréquemment. Cela est dû à la vogue, parmi les didacticiens, des problèmes où l'ensemble des possibles prend la forme d'un arbre que l'on peut condenser en un graphe fléché et bouclé (comme celui de la fig. 1); or, cette condensation n'est possible que pour *certains* choix de la probabilité (schémas à transitions markoviennes stationnaires); les graphes ainsi condensés sont donc inaptes à représenter l'ensemble des possibles, puisque celui-ci est logiquement antérieur à la définition de la probabilité (preuve: le domaine de Pr est une partie de $\mathscr{P}\Omega$). Il y a là une situation qu'il importe de corriger au stade *B*, avec l'espoir que la correction se propagera au stade *A*.

5. Variables aléatoires

a. Depuis que la réforme de l'enseignement mathématique au niveau secondaire a amené à sa place (l'une des toutes premières) la notion de fonction, il n'est vraiment pas difficile de faire voir aux élèves, dès le stade *A*, que de nombreux éléments intéressants d'une situation aléatoire quelconque sont des applications de l'ensemble des possibles (Ω) dans l'ensemble des réels (**R**). Au stade *B*, une révision de ces exemples conduit à la définition explicite.

b. Le terme « variable aléatoire » a été critiqué comme impropre, et il est bien vrai qu'une application de Ω dans **R** n'a rien de variable ni d'aléatoire. Si on estime que cette critique est justifiée, rien n'empêche de changer de terme, et de dire par exemple « aléa numérique réel ». Mais on peut estimer aussi que cette critique vient de mathématiciens « purs », qui ont privilégié le formalisme et oublié la situation; en effet, d'un point de vue concret, ce qui est en jeu est bel et bien une grandeur qui, *d'une réalisation à l'autre* [1]), peut prendre diverses valeurs — c'est donc bien une *variable* — et ce de façon anarchique — c'est donc bien une variable *aléatoire*. Il y a là une querelle qui n'a ni importance ni intérêt.

c. Il est beaucoup plus important, au stade *B*, de faire ressortir ce qui suit: pour un élément aléatoire $\boldsymbol{x}$ à valeurs réelles, il est de la plus haute importance que, pour tout intervalle I, l'événement « la valeur réalisée de $\boldsymbol{x}$ appartient à *I* » soit observable; autrement dit (en notant $\mathscr{I}$ l'ensemble des intervalles de **R**), l'application

$$\boldsymbol{x}: \ \Omega \to \mathbf{R} : \omega \mapsto \boldsymbol{x}(\omega)$$

ne mérite le nom de « variable aléatoire » que si elle satisfait à la condition

$$\forall I \in \mathscr{I}; \qquad \underset{[= \{\omega \setminus \boldsymbol{x}(\omega) \in I\}]}{\overset{-1}{\boldsymbol{x}} \ I} \in \mathscr{T}.$$

[1]) Nous avons déjà dit, plusieurs fois, que la notion même de réalisation est étrangère au formalisme probabiliste.