Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÔLE, PLACE, ET CONTENU D'UN PREMIER ENSEIGNEMENT DÉDUCTIF DES PROBABILITÉS

Autor: Breny, H.

Kapitel: 5. Variables aléatoires

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48177

probabilité (schémas à transitions markoviennes stationnaires); les graphes ainsi condensés sont donc inaptes à représenter l'ensemble des possibles, puisque celui-ci est logiquement antérieur à la définition de la probabilité (preuve: le domaine de Pr est une partie de $\mathscr{P}\Omega$). Il y a là une situation qu'il importe de corriger au stade B, avec l'espoir que la correction se propagera au stade A.

5. Variables aléatoires

a. Depuis que la réforme de l'enseignement mathématique au niveau secondaire a amené à sa place (l'une des toutes premières) la notion de fonction, il n'est vraiment pas difficile de faire voir aux élèves, dès le stade A, que de nombreux éléments intéressants d'une situation aléatoire quelconque sont des applications de l'ensemble des possibles (Ω) dans l'ensemble des réels ($\mathbf{R}$). Au stade B, une révision de ces exemples conduit à la définition explicite.

b. Le terme « variable aléatoire » a été critiqué comme impropre, et il est bien vrai qu'une application de Ω dans $\mathbf{R}$ n'a rien de variable ni d'aléatoire. Si on estime que cette critique est justifiée, rien n'empêche de changer de terme, et de dire par exemple « aléa numérique réel ». Mais on peut estimer aussi que cette critique vient de mathématiciens « purs », qui ont privilégié le formalisme et oublié la situation; en effet, d'un point de vue concret, ce qui est en jeu est bel et bien une grandeur qui, *d'une réalisation à l'autre* [1]), peut prendre diverses valeurs — c'est donc bien une *variable* — et ce de façon anarchique — c'est donc bien une variable *aléatoire*. Il y a là une querelle qui n'a ni importance ni intérêt.

c. Il est beaucoup plus important, au stade B, de faire ressortir ce qui suit: pour un élément aléatoire $\boldsymbol{x}$ à valeurs réelles, il est de la plus haute importance que, pour tout intervalle I, l'événement « la valeur réalisée de $\boldsymbol{x}$ appartient à I » soit observable; autrement dit (en notant $\mathscr{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbf{R}$), l'application

$$\boldsymbol{x}: \ \Omega \rightarrow \mathbf{R} : \omega \mapsto \boldsymbol{x}(\omega)$$

ne mérite le nom de « variable aléatoire » que si elle satisfait à la condition

$$\forall I \in \mathscr{I}; \qquad \underbrace{\overset{-1}{\boldsymbol{x}}\, I}_{[=\{\omega \mid \boldsymbol{x}(\omega) \in I\}]} \in \mathscr{T}.$$

1) Nous avons déjà dit, plusieurs fois, que la notion même de réalisation est étrangère au formalisme probabiliste.

Dès lors, la définition de la fonction de répartition de x ne recèle plus aucun mystère:

$$F_x : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : a \mapsto \Pr(\overset{-1}{x}\,]-\infty ; a]) .$$

d. Les spécialistes contemporains de la théorie mathématique des probabilités manifestent une désaffection très nette vis-à-vis de la fonction de répartition, et lui substituent volontiers la « loi de probabilité ». Celle-ci est, somme toute, aisée à définir; d'une part,

$$\mathscr{X} = \{ A \subset \mathbf{R} \mid \overset{-1}{x} A \in \mathscr{T} \}$$

et d'autre part,

$$L_x : \mathscr{X} \to \mathbf{R} : A \mapsto \Pr(\overset{-1}{x} A) .$$

Mais néanmoins, cette tendance ne doit pas affecter le premier enseignement déductif de la théorie; d'une part, parce que la loi de probabilité ne peut, à ce stade, jouer aucun rôle [1]); d'autre part, parce que la fonction de répartition joue un rôle essentiel et irremplaçable: celui d'une description géométrique des propriétés de la variable aléatoire.

e. Un enseignement déductif des probabilités se doit de justifier son titre en démontrant, en toute rigueur et en toute généralité, non seulement que toute fonction de répartition (F) est croissante (c'est facile) mais encore qu'elle jouit des propriétés

$$\lim_{\to -\infty} F = 0 \qquad \lim_{\to +\infty} F = 1$$

$$\forall a \in \mathbf{R} ; \ \Pr(\overset{-1}{x}\,]-\infty ; a[) = \sup\{ F(t) \mid t < a \},$$

ce qui nécessite l'intervention de l'axiome K3.

f. On peut estimer qu'un *premier* enseignement déductif doit s'en tenir aux variables aléatoires à nombre fini de valeurs (encore que cette opinion soit sujette à de très sérieuses objections; par exemple, la situation décrite par la figure 1 met en jeu des variables aléatoires à une infinité de valeurs). Mais il serait déplorable que les définitions et énoncés rencontrés dans cet enseignement soient applicables au seul cas fini. Bien au contraire, pour que ce premier enseignement déductif ne soit pas un

---

[1]) Pour les mathématiciens professionnels, elle permet la considération de l'énoncé, en effet essentiel (où g est une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$)

$$\int_\Omega (g \circ x)\, dPr = \int_{\mathbf{R}} g\, dL_x .$$

obstacle à un développement ultérieur, il faut que les définitions soient parfaitement générales et que les énoncés soient aussi généraux que possible, quitte à ne les démontrer que pour le seul cas fini. En ce qui concerne les variables aléatoires et leurs valeurs typiques, on y arrive en exploitant les propriétés géométriques de la fonction de répartition; par exemple, on prend comme définition de la moyenne μ de x la relation *géométrique* (égalité d'aires)

$$\int_{-\infty}^{\mu} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(t)]\,\mathrm{d}t\,, \tag{8a}$$

tandis que l'écart-moyen V et la variance σ^2 sont définis par les expressions *géométriques* (sommes de deux aires)

$$V = \int_{-\infty}^{\mu} F(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(t)]\,\mathrm{d}t \tag{8b}$$

$$\frac{\sigma^2}{2} = \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{t} F(s)\,\mathrm{d}s + \int_{\mu}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{t}^{+\infty} [1 - F(s)]\,\mathrm{d}s\,. \tag{8c}$$

[L'aspect *géométrique* (en termes d'aires) des expressions (8) est particulièrement important: il s'agit de faire « voir » la signification des paramètres μ, V, σ; un traitement analytique basé sur les formules (8) est, à ce niveau, entièrement à rejeter (bien qu'il soit parfaitement correct).]
Il est alors possible de démontrer en toute généralité que V est la moyenne de la variable aléatoire $| x - \mu |$; par contre, démontrer que σ^2 est la moyenne de la variable aléatoire $(x - \mu)^2$ n'est possible, avec ces moyens, que pour le cas des variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est soit fini soit inclus dans $\mathbf{N}$.

De cette façon, un premier enseignement déductif atteint parfaitement son but: il met en place et il organise les notions intuitives acquises au stade antérieur, sans rendre plus difficile, mais au contraire en préparant, l'enseignement plus théorique qui, pour certains élèves, lui fera suite.

6. Introduction a la statistique

a. S'il convient, ou non, d'introduire à la fin de l'enseignement secondaire un premier enseignement systématique de la statistique inférentielle est une question controversée; il y a des arguments en sa faveur (p. ex., que dans l'enseignement supérieur ces éléments sont souvent utilisés avant