Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LE THÉORÈME DES TROIS CARRÉS

Autor: Rajwade, A. R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48182

NOTE SUR LE THÉORÈME DES TROIS CARRÉS

par A. R. Rajwade

Le théorème des trois carrés, de Gauss, dit qu'un entier positif m peut être représenté par une somme de trois carrés entiers si et seulement si m est de la forme $m = 2^a n$, avec a et n entiers, n impair et $n \not\equiv 7 \pmod 8$. Fein, Gordon et Smith [1] ont démontré que ce sont les mêmes entiers m pour lesquels -1 peut être représenté par une somme de deux carrés dans le corps $Q(\sqrt{-m})$. Risman [3] a remarqué que l'un de ces théorèmes peut se déduire de l'autre. Nous allons établir ce même fait plus simplement en donnant une démonstration tout à fait élémentaire du théorème suivant:

Théorème (voir [2]). *Soit m un entier positif. Pour que -1 soit somme de deux carrés dans $Q(\sqrt{-m})$, il faut et il suffit que m soit somme de trois carrés entiers.*

Notons d'abord que si -1 est somme de 3 carrés dans un corps, -1 est somme de 2 carrés dans le même corps. Car si $-1 = x^2 + y^2 + z^2$, comme $(xz+y)^2 + (yz-x)^2 = (x^2+y^2)(1+z^2) = -(x^2+y^2)^2$, on a

$$-1 = \left(\frac{xz+y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{yz-x}{x^2+y^2}\right)^2 .$$

D'autre part, si $m = a^2 + b^2 + c^2$, a, b, et c étant entiers,

$$-1 = \left(\frac{a}{\sqrt{-m}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{-m}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{-m}}\right)^2$$

est bien somme de trois carrés dans $Q(\sqrt{-m})$, et la suffisance de la condition est établie.

Pour établir sa nécessité, supposons que -1 soit somme de 2 carrés dans $Q(\sqrt{-m})$, $-1 = \alpha^2 + \beta^2$, avec $\alpha = a + b\sqrt{-m}$, $\beta = c + d\sqrt{-m}$, a, b, c et d étant rationnels. Nous montrerons d'abord que m est alors somme de trois carrés dans Q. En égalant parties réelles et imaginaires, on a

$$a^2 + c^2 - m(b^2+d^2) = -1 \qquad \text{et} \qquad ab + cd = 0 .$$

Si $b = 0$, alors $d \neq 0$, $c = 0$ et $a^2 - md^2 = -1$ d'où

$$m = \left(\frac{a}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2.$$

De même si $d = 0$, on a

$$m = \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

Enfin, si $bd \neq 0$, on a

$$\frac{a}{d} = -\frac{c}{b}$$

d'où

$$\frac{a^2}{d^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{d^2 + b^2}$$

et

$$m = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} + \frac{1}{b^2 + d^2} = \frac{c^2}{b^2} + \frac{1}{b^2 + d^2} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{b}{b^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{d}{b^2 + d^2}\right)^2.$$

Pour être complet, montrons encore (d'après Serre [4], où l'on trouvera aussi une démonstration complète du théorème des trois carrés) que, si m est somme de trois carrés dans Q, m est somme de trois carrés dans Z. Il s'agit de prouver que si la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{m}$ dans R^3 contient un point rationnel, elle contient aussi un point entier. Soit ξ un point rationnel sur cette sphère et t le plus petit entier positif tel que $t\xi$ soit un point entier. Il suffira de montrer que si $t > 1$ il existe sur cette sphère un autre point rationnel ξ' et un entier positif $t' < t$ tels que $t'\xi'$ soit un point entier: notre assertion s'en déduit immédiatement. Soit alors y un point entier de R^3 dont la distance à ξ soit minimum, en sorte que $|y - \xi|^2 \leqslant 3/4 < 1$. La droite passant par y et ξ recoupe la sphère en un autre point rationnel ξ' et l'on a

$$\xi' - y = \lambda(\xi - y) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in R\,.$$

D'autre part, on sait que la valeur du produit scalaire $(\xi' - y)\,.\,(\xi - y)$ (« puissance de y par rapport à la sphère ») ne change pas si l'on déplace ξ sur la sphère. En l'amenant sur la droite passant pas y et 0, on obtient

$$(\xi' - y)\,.\,(\xi - y) = (|y| - \sqrt{m})\,.\,(|y| + \sqrt{m}) = y\,.\,y - m\,,$$

d'où

$$\lambda(\xi - y) . (\xi - y) = y . y - m \quad \text{et} \quad \xi' - y = \frac{y . y - m}{(\xi - y) . (\xi - y)} (\xi - y) .$$

En multipliant cette dernière relation par

$$t' = t(\xi - y) . (\xi - y) = t \xi . \xi - 2t \xi . y + ty . y ,$$

qui est entier, vu que $\xi . \xi = m$, t, $t\xi$ et y sont entiers, on voit que $t'\xi'$ est entier, et $t' < t$ puisque $(\xi - y) . (\xi - y) = | y - \xi |^2 < 1$, ce qui achève la démonstration.

RÉFÉRENCES

[1] FEIN, B., B. GORDON and J. H. SMITH. On the representation of -1 as a sum of two squares in an Algebraic Number Field. *J. Number theory 3* (1971), pp. 310-315.
[2] RAJWADE, A. R. A note on the stufe of quadratic fields. *Indian J. of Pure and Applied Mathematics*, à paraître.
[3] RISMAN, L. J. A new proof of the three squares theorem. *J. Number theory 6* (1974), pp. 282-283.
[4] SERRE, J. P. *Cours d'arithmétique.* Presses universitaires de France, Paris 1970.

(Reçu le 11 janvier 1976)

A. R. Rajwade

Department of Mathematics
Panjab University
Chandigarh — 160014
India