

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1976)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTE SUR LE THÉORÈME DES TROIS CARRÉS  
**Autor:** Rajwade, A. R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48182>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# NOTE SUR LE THÉORÈME DES TROIS CARRÉS

par A. R. RAJWADE

Le théorème des trois carrés, de Gauss, dit qu'un entier positif  $m$  peut être représenté par une somme de trois carrés entiers si et seulement si  $m$  est de la forme  $m = 2^a n$ , avec  $a$  et  $n$  entiers,  $n$  impair et  $n \not\equiv 7 \pmod{8}$ . Fein, Gordon et Smith [1] ont démontré que ce sont les mêmes entiers  $m$  pour lesquels  $-1$  peut être représenté par une somme de deux carrés dans le corps  $Q(\sqrt{-m})$ . Risman [3] a remarqué que l'un de ces théorèmes peut se déduire de l'autre. Nous allons établir ce même fait plus simplement en donnant une démonstration tout à fait élémentaire du théorème suivant :

**THÉORÈME** (voir [2]). *Soit  $m$  un entier positif. Pour que  $-1$  soit somme de deux carrés dans  $Q(\sqrt{-m})$ , il faut et il suffit que  $m$  soit somme de trois carrés entiers.*

Notons d'abord que si  $-1$  est somme de 3 carrés dans un corps,  $-1$  est somme de 2 carrés dans le même corps. Car si  $-1 = x^2 + y^2 + z^2$ , comme  $(xz + y)^2 + (yz - x)^2 = (x^2 + y^2)(1 + z^2) = -(x^2 + y^2)^2$ , on a

$$-1 = \left(\frac{xz + y}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{yz - x}{x^2 + y^2}\right)^2.$$

D'autre part, si  $m = a^2 + b^2 + c^2$ ,  $a$ ,  $b$ , et  $c$  étant entiers,

$$-1 = \left(\frac{a}{\sqrt{-m}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{-m}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{-m}}\right)^2$$

est bien somme de trois carrés dans  $Q(\sqrt{-m})$ , et la suffisance de la condition est établie.

Pour établir sa nécessité, supposons que  $-1$  soit somme de 2 carrés dans  $Q(\sqrt{-m})$ ,  $-1 = \alpha^2 + \beta^2$ , avec  $\alpha = a + b\sqrt{-m}$ ,  $\beta = c + d\sqrt{-m}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  étant rationnels. Nous montrerons d'abord que  $m$  est alors somme de trois carrés dans  $Q$ . En égalant parties réelles et imaginaires, on a

$$a^2 + c^2 - m(b^2 + d^2) = -1 \quad \text{et} \quad ab + cd = 0.$$

Si  $b = 0$ , alors  $d \neq 0$ ,  $c = 0$  et  $a^2 - md^2 = -1$  d'où

$$m = \left(\frac{a}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2.$$

De même si  $d = 0$ , on a

$$m = \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

Enfin, si  $bd \neq 0$ , on a

$$\frac{a}{d} = -\frac{c}{b}$$

d'où

$$\frac{a^2}{d^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{d^2 + b^2}$$

et

$$m = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} + \frac{1}{b^2 + d^2} = \frac{c^2}{b^2} + \frac{1}{b^2 + d^2} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{d}{b^2 + d^2}\right)^2.$$

Pour être complet, montrons encore (d'après Serre [4], où l'on trouvera aussi une démonstration complète du théorème des trois carrés) que, si  $m$  est somme de trois carrés dans  $\mathcal{Q}$ ,  $m$  est somme de trois carrés dans  $\mathcal{Z}$ . Il s'agit de prouver que si la sphère de centre 0 et de rayon  $\sqrt{m}$  dans  $R^3$  contient un point rationnel, elle contient aussi un point entier. Soit  $\xi$  un point rationnel sur cette sphère et  $t$  le plus petit entier positif tel que  $t\xi$  soit un point entier. Il suffira de montrer que si  $t > 1$  il existe sur cette sphère un autre point rationnel  $\xi'$  et un entier positif  $t' < t$  tels que  $t'\xi'$  soit un point entier: notre assertion s'en déduit immédiatement. Soit alors  $y$  un point entier de  $R^3$  dont la distance à  $\xi$  soit minimum, en sorte que  $|y - \xi|^2 \leq 3/4 < 1$ . La droite passant par  $y$  et  $\xi$  recoupe la sphère en un autre point rationnel  $\xi'$  et l'on a

$$\xi' - y = \lambda(\xi - y) \quad \text{avec} \quad \lambda \in R.$$

D'autre part, on sait que la valeur du produit scalaire  $(\xi' - y) \cdot (\xi - y)$  (« puissance de  $y$  par rapport à la sphère ») ne change pas si l'on déplace  $\xi$  sur la sphère. En l'amenant sur la droite passant par  $y$  et 0, on obtient

$$(\xi' - y) \cdot (\xi - y) = (|y| - \sqrt{m}) \cdot (|y| + \sqrt{m}) = y \cdot y - m,$$

d'où

$$\lambda(\xi - y) \cdot (\xi - y) = y \cdot y - m \quad \text{et} \quad \xi' - y = \frac{y \cdot y - m}{(\xi - y) \cdot (\xi - y)} (\xi - y).$$

En multipliant cette dernière relation par

$$t' = t(\xi - y) \cdot (\xi - y) = t\xi \cdot \xi - 2t\xi \cdot y + ty \cdot y,$$

qui est entier, vu que  $\xi \cdot \xi = m$ ,  $t$ ,  $t\xi$  et  $y$  sont entiers, on voit que  $t'\xi'$  est entier, et  $t' < t$  puisque  $(\xi - y) \cdot (\xi - y) = |y - \xi|^2 < 1$ , ce qui achève la démonstration.

### RÉFÉRENCES

- [1] FEIN, B., B. GORDON and J. H. SMITH. On the representation of  $-1$  as a sum of two squares in an Algebraic Number Field. *J. Number theory* 3 (1971), pp. 310-315.
- [2] RAJWADE, A. R. A note on thestufe of quadratic fields. *Indian J. of Pure and Applied Mathematics*, à paraître.
- [3] RISMAN, L. J. A new proof of the three squares theorem. *J. Number theory* 6 (1974), pp. 282-283.
- [4] SERRE, J. P. *Cours d'arithmétique*. Presses universitaires de France, Paris 1970.

(Reçu le 11 janvier 1976)

A. R. Rajwade

Department of Mathematics  
Panjab University  
Chandigarh — 160014  
India

**Vide-leer-empty**