Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI WILSON ALLE TERNE PRIME

Autor: Patrizio, Serafino

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48183

GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI WILSON ALLE TERNE PRIME

di Serafino PATRIZIO

RÉSUMÉ

On donne une condition nécessaire et suffisante, portant sur p, pour que les nombres naturels $p-2$, p, $p+4$ soient tous premiers. On signale ensuite une condition analogue pour que $p-4$, p, $p+2$ soient tous premiers.

1. Nel presente lavoro [1]) viene stabilita una condizione necessaria e sufficiente perchè i naturali

$$p-2,\ p,\ p+4, \quad \text{con} \quad p \in N_7,$$

siano primi, ottenendosi cosi una generalizzazione del teorema di Wilson.

Questa ricerca è anche un po' giustificata dal fatto che, notoriamente, non si sa ancora se il numero delle terne prime in questione sia, o no, finito.

Come è noto ([2], pag. 261), dati due naturali $p-2$ e p, con $p \in N_5$, essi sono entrambi primi se, e solo se, risulta:

$$(1,1) \qquad 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -5 \ (\text{mod. } p)\,.$$

2. Osserviamo anzitutto che alla necessita'della (1,1) si puo' pervenire rapidamente nel modo seguente.

Supposto $p-2 \in \mathscr{P}$, con $p \in N_5$, il naturale $p-2$ è soluzione dell'equazione dei numeri primi [2]) di F. PELLEGRINO, e pertanto si ha:

---

[1]) Questo lavoro è nato, nell'ambito dell'Istituto di Matematica della Facolta' di Scienze della Universita' de L'Aquila, da conversazioni avute con il Prof. Franco PELLEGRINO che tengo qui a ringraziare cordialmente.

La presente Memoria presuppone i concetti, le notazioni e le nozioni introdotte ed usate nei lavori di F. PELLEGRINO. Cosi' indichiamo con $\mathscr{P}$ l'insieme dei numeri primi; con N_q, $(q \in N_0)$, l'insieme dei naturali non inferiori a q; con $\mathscr{D}(n)$, $(n \in N_1)$, l'insieme dei divisori di n.

[2]) [2], pag. 259, dove viene mostrato che le soluzioni in N_1 dell'equazione

$$\frac{(p-1)\,!}{p} - \left[\frac{(p-1)\,!}{p}\right] = \frac{p-1}{p}$$

sono tutti e soli gli elementi di $\mathscr{P}$.

$$(2,1) \qquad \frac{(p-3)\,!}{p-2} - \left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] = \frac{p-3}{p-2},$$

da cui:

$$(p-3)\,! - (p-2)\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] = p-3\,.$$

Da quest'ultima si deduce facilmente che se è $p - 2 \in \mathscr{P}$, il naturale p soddisfa alla congruenza:

$$(p-3)\,! + 2\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -3 \pmod{p},$$

da cui, dopo semplici passaggi:

$$(p-1)\,! + 1 + 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -5 \pmod{p}.$$

Da questa, se si suppone che (anche) p sia primo, per il teorema di Wilson, si ha infine:

$$(2,2) \qquad 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -5 \pmod{p}.$$

Si ha cioè che se i due naturali $p - 2$ e p sono entrambi primi, con $p \in N_5$, il naturale p soddisfa certamente alla (2,2). Con cio' si è quindi riottenuta la necessita' della condizione (1,1).

3. Cio' posto vogliamo ora dare una condizione necessaria e sufficiente perchè i naturali

$$p-2, p, p+4, \text{ con } p \in N_7,$$

siano elementi di $\mathscr{P}$.

Ammesso che $p - 2$ e p + 4 siano primi, e quindi $p \in N_7$, dall'equazione dei numeri primi si hanno le seguenti condizioni per p:

$$(3,1) \qquad \frac{(p-3)\,!}{p-2} - \left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] = \frac{p-3}{p-2}$$

$$(3,2) \qquad \frac{(p+3)\,!}{p+4} - \left[\frac{(p+3)\,!}{p+4}\right] = \frac{p+3}{p+4}$$

Ora, dalla (3,1) si ha:

$$(3,3) \qquad p-3 = (p-3)\,! - (p-2)\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right]$$

e dalla (3,2):

$$p + 3 = (p+3)\,! - (p+4)\left[\frac{(p+3)\,!}{p + 4}\right], \tag{3,4}$$

da cui:

$$6 = (p+3)\,! - (p-3)\,! - p\left\{\left[\frac{(p+3)\,!}{p + 4}\right] - \left[\frac{(p-3)\,!}{p - 2}\right]\right\} \tag{3,5}$$
$$- 2\left[\frac{(p-3)\,!}{p - 2}\right] - 4\left[\frac{(p+3)\,!}{p + 4}\right].$$

Si è cosi' ottenuto che nelle ipotesi

$$p \in N_7\,; \quad p - 2, p + 4 \in \mathscr{P}, \tag{3,6}$$

il naturale p soddisfa alla (3,5) e quindi anche alla sua conseguenza:

$$4\left[\frac{(p+3)\,!}{p + 4}\right] + 2\left[\frac{(p-3)\,!}{p - 2}\right] + (p-3)\,! \equiv -6 \pmod{p}, \tag{3,7}$$

ovvero alla:

$$8\left[\frac{(p+3)\,!}{p + 4}\right] + 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p - 2}\right] + (p-1)\,! + 1 \equiv -11 \pmod{p}. \tag{3,8}$$

Questa, nella ulteriore ipotesi:

$$p \in \mathscr{P} \cap N_7 \tag{3,9}$$

diventa:

$$8\left[\frac{(p+3)\,!}{p + 4}\right] + 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p - 2}\right] \equiv -11 \pmod{p}. \tag{3,10}$$

Pertanto puo' dirsi che condizione necessaria perchè siano

$$p - 2, p, p + 4 \in \mathscr{P}, \text{ con } p \in N_7, \tag{3,11}$$

è che p soddisfi la (3,10).

4. Dimostriamo ora, viceversa, che se $p \in N_7$ soddisfa la (3,10) cio' è (anche) sufficiente perchè i naturali

$$p - 2, p, p + 4$$

siano primi.

Ci occorre per questo premettere alcuni Lemmi e Teoremi.

LEMMA 4-1. *Se* $p \in N_3$ *verifica la* (3,10), *tale* p *è dispari.*

Infatti se $p \in N_3$ verifica la (3,10) esiste un intero relativo λ, anzi un naturale λ, tale che sussista l'identita':

$$(4,1) \qquad 8\left[\frac{(p+3)\,!}{p+4}\right] + 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] + 11 = \lambda p\,.$$

E allora l'assunto è evidente per il fatto che il primo membro della (4,1) è senz'altro un numero dispari.

Proviamo ora che:

LEMMA 4-2. *Se* $p \in N_5$ *e se* $p+4$ *è composto, il naturale*

$$\frac{(p+3)\,!}{p+4}$$

è multiplo di p.

Dim. Osserviamo in primo luogo che il lemma è evidente se è

$$(p, p+4) = 1\,.$$

Per gli altri casi proviamo prima che, nell'ipotesi $p \in N_5$, ogni divisore non banale di $p+4$ è certo minore di p.

E' noto [1]) infatti che per il piu' grande divisore non banale δ di $p+4$ si ha:

$$\delta \leqslant \left[\frac{p+4}{2}\right] = \left[\frac{p}{2}\right] + 2\,.$$

Premesso cio' è evidente che l'assunto sara' provato se mostriamo che è:

$$(4,2) \qquad \frac{(p-1)\,!}{p+4} \in N_1\,.$$

Ora, essendo $p+4$ composto si puo' porre, tenendo presente quanto visto prima sui divisori non banali di $p+4$,

$$p+4 = d_1 d_2\,, \text{ con } d_1, d_2 \in N_2 - N_p\,.$$

E allora se $d_1 \neq d_2$ l'assunto è evidente.

Se poi è $d_1 = d_2$, e quindi:

$$p+4 = d_1^2\,,$$

[1]) cfr. F. PELLEGRINO: Dispense di Teoria dei Numeri.

supposto $p \in N_9$, si ha:

$$d_1^2 = p + 4 < 2p$$

da cui

(4,3) $$2d_1 < 2\sqrt{2p} < 2p\,,$$

l'ultimo membro provenendo dal fatto che per essere $p \in N_9$, è

$$(2\sqrt{2p})^2 = 8p < p^2\,.$$

La (4,3) ci dice che nell'insieme $N_1 - N_p$, il prodotto dei cui elementi da' $(p-1)\,!$, ci sono due elementi distinti d_1 e $2d_1$ contenenti appunto d_1. Il Lemma è cosi' provato nell'ipotesi $p \in N_9$.

Siccome poi per $p = 8$ e $p = 6$ è $(p, p+4) \in N_2$, ma $p + 4$ non è un quadrato e per $p = 7$ e $p = 5$ è $(p, p+4) = 1$, il Lemma è vero per $p \in N_5$.

Un'altra dimostrazione dello stesso Lemma, piu' lunga ma che richiede soltanto proprieta' dei numeri naturali, si ottiene provando prima per assurdo che se d è un divisore non banale di $p + 4$ non si puo' porre $d = p + i$, con $i \in N_0$.

Si prova poi che per ogni $p \in N_5$ è vera la (4.2), osservando prima che è

$$\delta = (p, p+4) = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \end{cases}$$

e discutendo poi i due casi $\delta = 2$ e $\delta = 4$.

Ci servira' di aver osservato che al Lemma in discorso puo' darsi anche la forma:

LEMMA $(4\text{-}2)_1$. *Se $p \in N_9$ e $p \notin \mathscr{P}$, il naturale*

(4,4) $$\frac{(p-1)\,!}{p}$$

è multiplo di $p - 4$.

Cio' posto proviamo che:

TEOREMA 4-3. *Condizione necessaria perchè sia*

(4,5) $$p \in \mathscr{P} \cap N_7$$

è che il naturale p sia soluzione della

$$(4{,}6) \qquad 4\left[\frac{(p-1)\,!}{p}\right] \equiv -3 \pmod{p-4}\,.$$

Inoltre, nell'ipotesi

$$(4{,}7) \qquad p \in N_{11}\,,$$

tale condizione è anche sufficiente.

Dim. Che la condizione sia necessaria è immediato, in quanto supposto $p \in \mathscr{P} \cap N_7$, la (4,6), con l'aiuto dell'equazione dei numeri primi, con pochi calcoli, si riduce all'identita'

$$p - 4 \equiv 0 \pmod{p-4}\,.$$

La condizione è sufficiente. Supponiamo infatti che un numero composto p possa verificare la (4,6). E' subito visto che cio' è assurdo per ogni p composto elemento di N_9. In tal caso infatti il primo membro della (4,6) è, per il Lemma $(4\text{-}2)_1$, multiplo di $p - 4$, e quindi tale dovrebbe essere 3. Ma cio' è evidentemente impossibile con $p \in N_9$. Ogni naturale $p \in N_9$ che soddisfa la (4,6) è dunque certamente primo e quindi elemento di N_{11}.

Della condizione sufficiente in questione puo' darsi un'altra dimostrazione che ora esponiamo e che non ricorre al Lemma 4-2. Essa vale pero' soltanto per $p \in N_{17}$.

Supponiamo per questo che $p \in N_7$ soddisfi alla

$$(4{,}6) \qquad 4\left[\frac{(p-1)\,!}{p}\right] \equiv -3 \pmod{p-4}$$

e che p non sia primo. La (4,6) si scrive allora:

$$-4\,(p-1)\,! \equiv 3p \pmod{p-4}$$

da cui:

$$3p \equiv 0 \pmod{p-4}\,.$$

Deve essere pertanto

$$3p = \rho\,(p-4)\,, \text{ con } \rho \in \pm N_0\,.$$

Ma è:

$$3p = 3\,(p-4) + 12$$

e quindi, se si vuole che $3p$ sia multiplo di $p - 4$, tale dovra' essere pure 12. Ne segue che $p - 4 \in \mathscr{D}(12)$ per cui è al piu' $p = 16$. Pertanto se $p \in N_{17}$ verifica la (4,6), tale p dovra' essere primo.

Nel seguito ci occorrera' il Teorema precedente nella forma che si ottiene cambiando p in $p + 4$, e cioè:

TEOREMA $(4\text{-}3)_1$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè sia*

$$p + 4 \in \mathscr{P} \cap N_{11} \tag{4,9}$$

è che il naturale $p \in N_7$ *soddisfi alla*

$$4\left[\frac{(p+3)\,!}{p+4}\right] \equiv -3 \pmod{p}\,. \tag{4,10}$$

Osserviamo infine che la (4,6) è una condizione perchè $p \in N_7$ sia primo.

5. Possiamo finalmente dimostrare, usando dei risultati del numero precedente, che se $p \in N_7$ soddisfa la (3,10), cio' è sufficiente perchè sia:

$$p - 2, p, p + 4 \in \mathscr{P}\,. \tag{5,1}$$

Cominciamo per questo col provare che:

TEOREMA 5-1. *Supposto che* $p \in N_7$ *verifichi la* (3,10), *il naturale* $p + 4$ *è primo.*

Dimostriamo la tesi in ciascuna delle due ipotesi

$$p - 2 \in \mathscr{P} \tag{5,2}$$

e

$$p - 2 \notin \mathscr{P}\,. \tag{5,3}$$

Procedendo per assurdo, supposto cioè che $p + 4$ non sia primo, e supponendo che, in un primo tempo, valga la (5,2), la (3,10) puo' scriversi, tenendo conto della gia' citata equazione dei numeri primi:

$$8\,\frac{(p+3)\,!}{p+4} + 4\left\{\frac{(p-3)\,!}{p-2} - \frac{p-3}{p-2}\right\} \equiv -11 \pmod{p}\,. \tag{5,4}$$

Con facili calcoli, e per il Lemma $(4\text{-}2)_1$ si ottiene allora che, se $p \in N_7$ verifica la (5,4) esso dovra' verificare la

$$4\,(p-1)\,! \equiv 20 \pmod{p}\,. \tag{5,5}$$

Ora, supposto un tale p composto, e quindi elemento di $N_8 - \mathscr{P}$ è $(p-1)\,!$ divisibile per p e pertanto p dovra' dividere il numero 20. Ne segue dunque che i soli numeri composti elementi di N_8 che soddisfano alla (5,5) sono i naturali 10 e 20. E tali naturali non soddisfano certo la (3,10) a causa del Lemma 4-1.

Ne' vi sono numeri primi elementi di N_7 che verificano la (5,5). Tale relazione infatti, potendosi porre sotto la forma

$$(5,6) \qquad 4\{(p-1)\,!+1\} \equiv 24 \quad (\mathrm{mod.}\ p),$$

ci dice che se un numero primo soddisfa la (5,6), e quindi la (5,5), esso dovra' essere un divisore (primo) di 24 e quindi non è elemento di N_7.

Dalla analisi fatta emerge pertanto che se $p-2$ è primo e se $p \in N_7$ soddisfa la (3,10), il naturale $p+4$ non puo' essere composto e deve essere quindi primo.

Cio' posto mostriamo che allo stesso risultato si perviene ammettendo ora che sia:

$$(5,3) \qquad p-2 \notin \mathscr{P}.$$

In tale ipotesi, procedendo sempre per assurdo, la (3,10) assume la forma:

$$8\,\frac{(p+3)\,!}{p+4} + 4\,\frac{(p-3)\,!}{p-2} \equiv -11 \quad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Pertanto, tenendo conto del Lemma 4-2, puo' dirsi che se $p \in N_7$ verifica la (3,10), esso dovra' verificare la:

$$(5,7) \qquad 4\,(p-3)\,! \equiv 22 \quad (\mathrm{mod.}\ p),$$

e quindi anche la:

$$(5,8) \qquad 4\,(p-1)\,! \equiv 44 \quad (\mathrm{mod.}\ p)$$

e la:

$$(5,9) \qquad 4\{(p-1)\,!+1\} \equiv 48 \quad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Con ragionamenti assolutamente analoghi a quelli esposti per il caso (5,2), l'esame della (5,8) ci fa concludere che i soli $p \in N_8$ composti che, nell'ipotesi $p+4 \notin \mathscr{P}$ e $p-2 \notin \mathscr{P}$, verificano la (3,10) sono i naturali 22 e 44 che pero', per il Lemma 4-1, non soddisfano la (3,10). D'altra parte l'esame della (5,9) ci dice che in N_7 non vi sono numeri primi che, nelle stesse ipotesi, verificano la (3,10). Pertanto nelle ipotesi in questione la (3,10) non puo' avere soluzioni.

Se ne conclude che sia nell'ipotesi (5,2), sia nell'ipotesi (5,3), se $p \in N_7$ soddisfa la (3,10) il supporre $p+4 \notin \mathscr{P}$ porta all'assurdo che in N_7 la (3,10) non ha soluzioni, eppero' se $p \in N_7$ siddisfa la (3,10) deve essere $p+4 \in \mathscr{P}$.

E' pure da osservare, in proposito, che la (3,10) ha certo soluzioni. E infatti è noto che esistono delle terne prime del tipo $p - 2, p, p + 4$, con $p \in N_7$, ed è stato visto (n.3) che per ognuna di esse p deve necessariamente verificare la (3,10).

Il Teorema 5-1 è cosi' dimostrato.

Osserviamo ora, infine, che supposto che $p \in N_7$ verifichi la (3,10), con il che è $p + 4 \in \mathscr{P}$, come si è visto, tenendo presente la (4,10), la (3,10) diventa:

$$-6 + 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -11 \quad (\text{mod. } p),$$

ovvero:

$$4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -5 \quad (\text{mod. } p). \tag{5,10}$$

Si è cosi' ottenuto che se $p \in N_7$ verifica la (3,10), esso deve verificare la (5,10) e cio', come sappiamo è sufficiente per asserire che $p - 2$ e p sono numeri primi.

Si è quindi dimostrato che:

TEOREMA 5-2. *Condizione sufficiente (oltre che necessaria) perchè sia*

$$p - 2, p, p + 4 \in \mathscr{P}, \quad \text{con } p \in N_7$$

è che p *verifichi la* (3,10).

Finiamo questa Nota osservando che alla (5,10) si poteva pervenire dalla (3,10) senza far uso del Teorema $(4\text{-}3)_1$.

Avendo infatti provato che se $p \in N_7$ verifica la (3,10) è $p + 4 \in \mathscr{P}$, usando della gia' citata equazione dei numeri primi, si ha l'identita':

$$\frac{(p+3)\,!}{p+4} - \left[\frac{(p+3)\,!}{p+4}\right] = \frac{p+3}{p+4}$$

da cui:

$$\left[\frac{(p+3)\,!}{p+4}\right] = \frac{(p+3)\,!}{p+4} - \frac{p+3}{p+4}.$$

Pertanto se $p \in N_7$ verifica la (3,10), esso verifica la:

$$8\left\{\frac{(p+3)\,!}{p+4} - \frac{p+3}{p+4}\right\} + 4\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -11 \quad (\text{mod. } p),$$

ovvero la:

$$16\left[\frac{(p-3)\,!}{p-2}\right] \equiv -20 \quad (\text{mod. } p)\,.$$

E da tale congruenza, poichè è $(4, p) = 1$ per il Lemma 4-1, si ottiene la (5,10) e da questa segue come visto la conclusione.

6. Applicando il metodo esposto in questo lavoro per stabilire la (3,10) è stata ottenuta, in una tesi di laurea [1]), una analoga condizione necessaria e sufficiente, portante su p, perchè i naturali

$$p-4, p, p+2$$

siano tutti primi.

Precisamente si è avuto il

Teorema 6-1. *Condizione necessaria e sufficiente perchè siano*

$$p-4, p, p+2 \in \mathscr{P}$$

è che p *sia soluzione della*

$$(6,1) \qquad 48\left[\frac{(p-5)\,!}{p-4}\right] + 15\left[\frac{(p+1)\,!}{p+2}\right] \equiv -67 \quad (\text{mod. } p)\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Pellegrino, F. Lineamenti di una teoria delle funzioni aritmetiche, I. *Rend. Mat. e Appl. (5) 15* (1956), 469-504.

[2] —— Teorema di Wilson e numeri primi gemelli. *Rend. Acc. Naz. dei Lincei, (VIII), Vol. XXXV, Fasc. 5* (1963).

(Reçu le 13 janvier 1976)

Serafino Patrizio

Istituto di Matematica della Universita' L'Aquila

Italia

---

1) E' quella del laureando Agostino Maiezza, relatore il Prof. F. Pellegrino.