§3. Proof of Theorem 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Let $\mathscr{I}$ be the collection of all closed intervals on $T_\xi(1/2)$ of the form $[\alpha_{nk}, \alpha_{n(k+1)}]$. Then it is easy to verify that

$$\mu(\hat{A}) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j),$$

where the inf is taken over all sequences $\{I_j\}$ of intervals in $\mathscr{I}$ covering $\hat{A}$.

Let $\varepsilon > 0$. Then there is a sequence $\{I_j\}$ of intervals in $\mathscr{I}$ that cover $\hat{A}$ such that

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon .$$

For each index j, there exist integers n_j and k_j such that

$$I_j = T_{n_j k_j}(1/2);$$

hence, in view of (B) in §1, we have

$$\Lambda(\hat{A}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{proj}[T_{n_j k_j}] .$$

Furthermore, combining (A) and (B) of §1, we obtain

$$\mu(\operatorname{proj}[T_{n_j k_j}]) = 2\mu(I_j) \quad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Therefore,

$$\mu^*(\Lambda(\hat{A})) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\operatorname{proj}[T_{n_j k_j}]) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < 2\varepsilon ,$$

and property (IV) is proved.

§3. Proof of Theorem 1

For each integer n, let $\xi_n = 1 + 3n/2$ and set

$$\Delta_n = K_{\xi_n} \cap \{(x, y) : \xi_n/2 \leqslant x \leqslant \xi_n/2 + 3/4 \quad \text{and} \quad 1/2 < y \leqslant 1\} .$$

Then set

$$\Delta_n^* = \{z - (1+i)/2 : z \in \Delta_n\} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

and define the set

$$\Delta = \cup \{\Delta_n^* : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} .$$

Let $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of points in $H - \Delta$ whose derived set is R. Define the function f_0 on $\Delta \cup \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ by

$$f_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad z \in \Delta \\ 1 & \text{for} \quad z = z_n \, (n = 1, 2, \ldots) . \end{cases}$$

Then let f be a continuous extension of f_0 to all of H. We now show that f is the desired function.

Let Q be a residual subset of R. Then, for each integer n, the set $Q_n = Q \cap [3n/4, 3(n+1)/4]$ is a residual subset of the closed interval $[3n/4, 3(n+1)/4]$. As a consequence of (III) for $\xi = \xi_n$, there exists a residual set of directions $\Theta_n \subset \{ \theta : 3n/2 \leqslant \cot \theta \leqslant 3(n+1)/2 \}$ such that, for each $\theta \in \Theta_n$, there exists a segment in Δ emanating from a point of Q_n and having the direction θ. Therefore, the set $\bigcap_{x \in Q} \Theta(x)$ is of the first category on the set $\{ \theta : 3n/2 \leqslant \cot \theta \leqslant 3(n+1)/2 \}$ for each integer n, and the theorem is proved.

§4. An Essential Cluster Set Example

If f is a measurable function from H to W, then the *essential cluster set* $C_e(f, x)$ *of* f *at* x is defined as the set of all values $w \in W$ for which the upper density of $f^{-1}(U)$ at x is positive for every open set U containing w; the *essential cluster set* $C_e(f, x, \theta)$ *of* f *at* x *in the direction* θ is the set of all values $w \in W$ for which the upper density of $f^{-1}(U)$ along the ray at x having direction θ is positive for every open set U containing w. As a supplement to a result of Casper Goffman and W. T. Sledd [4, Theorem 2], the present authors [1] proved the following result concerning the set

$$\Theta^*(x) = \{ \theta : C_e(f, x) \subset C_e(f, x, \theta) \} \quad (x \in R) .$$

THEOREM B.E.H. *If* $f : H \to W$ *is measurable, then* $\mu(\Theta^*(x)) = \pi$ *for almost every and nearly every* $x \in R$; *furthermore, if* f *is continuous, then* $\Theta^*(x)$ *is residual for almost every and nearly every* $x \in R$.

Again, a natural question to ask is whether or not, for a given function f, there exists a "large" set of directions Θ^* such that $\Theta^* \subset \Theta^*(x)$ for a "large" set of points $x \in R$. As a partial answer, we prove

THEOREM 2. *There exists a continuous* $f : H \to W$ *such that the intersection* $\bigcap_{x \in Q} \Theta^*(x)$ *is* (a) *of the first category if* $Q \subset R$ *is residual, and* (b) *of measure zero if* $Q \subset R$ *is of full measure.*