

Conclusion

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

libre, le produit tensoriel $P_n(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $P_n(B)$ de la B_n -algèbre B . Considérons encore les produits tensoriels importants

$$R_n(Z) = P_n(Z) \otimes_{Z_n} Z \text{ et } R_n(B) = P_n(B) \otimes_{B_n} B.$$

Les B -algèbres simpliciales $R_n(Z) \otimes_Z B$ et $R_n(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Z_n dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk} . Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par Tor_2 . Tor_1 , l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Z_n dans A donne un homomorphisme de $R_n(Z)$ dans R , donc un homomorphisme de $R_n(K)$ dans R , par produit tensoriel.

En résumé, on a la K -algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A -algèbre K , avec l'homomorphisme π correspondant, et la K -algèbre simpliciale R_n qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn -algèbre K , avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de R_n dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π . En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K . L'idéal Mn a $n(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

CONCLUSION

Considérons une résolution libre et multiplicative $\tilde{F}n$ de la Kn -algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\text{Tor}^{Kn}(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn , on peut remplacer les K -algèbres simpliciales Rn et $\tilde{R}n$ par les K -algèbres différentielles Fn et $\tilde{F}n$. L'élément gn appartient alors à $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\text{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \text{Tor}_3^{Kn}(K, K).$$

Il faut alors considérer hn , la p -ème puissance divisée de gn , qui est l'élément suivant de $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$, avec le degré $2p$,

$$\sum y_{i_1 i_2 \dots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_{2p-1}} \wedge dx_{i_{2p}}$$

avec la condition $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2p-1} < i_{2p} \leq n$ et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \dots i_{2p-1} i_{2p}} = \sum \text{sign } \sigma y_{\sigma_1 \sigma_2} \dots y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation σ des $2p$ éléments i_j est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \dots < \sigma_{2p-1}, \sigma_1 < \sigma_2, \dots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}.$$

Mais alors l'élément $\pi n (tn)$ est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments α_j et β_j dans \tilde{Fn} avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments α_j et β_j sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords $d\alpha_j$ et $d\beta_j$ sont tous des éléments de $\tilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$. En troisième lieu, l'élément hn est égal à la somme des bords $d(\alpha_j, \beta_j)$.

Lorsque l'idéal M est engendré par $2p-1$ éléments, on peut utiliser Kn avec n égal à $2p-1$. Mais alors hn est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

Lorsque l'idéal M a sa p -ème puissance nulle, on peut remplacer Kn par le quotient $Kn/(Mn)^p$. Mais alors hn modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

La plus petite algèbre Kn qui risque d'être intéressante est donc celle avec p égal à 2 et n égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément $\pi n (tn)$ n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme η_5 n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel ε_5 est strictement supérieur à δ_5 . A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDRÉ, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra* 18 (1971), 19-50.
- [2] ——— Homologie des algèbres commutatives. Springer, 1974.
- [3] CARTAN, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.