

§3. Functional "dimension" of the space of linear superpositions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$|v_i(t_{k+1}, t'_l) - v_i(t_k, t'_l)| \leq c_8 \frac{1}{\delta^2} \left(\int_{-1}^1 \frac{\delta m d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) \delta \frac{\alpha}{m} = c_9(\gamma) \alpha$$

(here we again use the mean value theorem), to store the numbers $v_i(t_{k+1}, t'_l) - v_i(t_k, t'_l)$ to within α , $\log_2 C_9$ binary digits are sufficient. Therefore to write the numbers $v_i(t_k, t'_l)$ (i, l fixed; k any admissible number)

$C_{10}(\gamma) \left[\log_2 \frac{m}{\alpha} + (b_i - a_i) \frac{m}{\delta \alpha} \right] = \mathcal{H}_{i,l}$ binary digits are sufficient. Consequently the total number of digits sufficient to store all the numbers $v_i(t_k, t'_l)$ to within α , that is, to store the functions $f_\delta(z)$ to within ε , is

$$\mathcal{H} = \sum_{i,l} \mathcal{H}_{i,l} \leq N c_{10}(\gamma) \left[\log_2 \frac{m}{\alpha} + (b_i - a_i) \frac{m}{\delta \alpha} \right] \frac{1}{\gamma} \frac{m}{\alpha} \leq \frac{B(\gamma, N, D)}{\delta} \left(\frac{m}{\varepsilon} \right)^2.$$

This proves the theorem.

§ 3. Functional "dimension" of the space of linear superpositions

Suppose that continuous functions $p_i(x, y)$ and continuously differentiable functions $q_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots, N$) are fixed. Let G be a closed region of the x, y plane. We denote by $F = F(G, \{p_i\}, \{q_i\})$ the set of superpositions of the form $f(x, y) = \sum_{i=1}^N p_i(x, y) f_i(q_i(x, y))$, where $(x, y) \in G$ and $\{f_i(t)\}$ are arbitrary continuous functions of one variable. We are interested in the functional dimension of the set F .

THEOREM 5.3.1. *In every region D of the x, y plane there exists a closed subregion $G \subset D$ such that*

$$r(F(G, \{p_i\}, \{q_i\})) \leq 1.$$

Proof. By Theorem 4.5.1, in D there exists a closed subregion $G^* \subset D$ such that the set of superpositions $F(G^*, \{p_i\}, \{q_i\})$ is closed (in the uniform metric) in $C(G^*)$, and the functions $\{q_i(x, y)\}$ satisfy the condition: for any i , either $\text{grad}[q_i(x, y)] \neq 0$ on G^* or $q_i(x, y) \equiv \text{const}$ on G^* . We show that $r(F(G^*, \{p_i\}, \{q_i\})) \leq 1$. By Banach's open mapping theorem, there exists a constant K such that for any superposition

$$\sum_{i=1}^N p_i(x, y) f_i(q_i(x, y)) = f(x, y) \in F(G^*, \{p_i\}, \{q_i\}) \text{ there are con-}$$

tinuous functions $\{f_i^*(t)\}$, defined on the sets $\{q_i(G^*)\}$ and satisfying the conditions

$$8) \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^N p_i(x, y) f_i^*(q_i(x, y)) \text{ for all } (x, y) \in G^* ;$$

$$9) \quad \max_i \max_{t \in q_i(G^*)} |f_i^*(t)| \geq K \max_{(x, y) \in G^*} |f(x, y)| .$$

Denote by $F_{\lambda\varepsilon} = F_{\lambda\varepsilon}(G^*, \{p_i\}, \{q_i\})$ the set of superpositions $f(x, y) \in F(G^*, \{p_i\}, \{q_i\})$ such that $\max_{(x, y) \in G^*} |f(x, y)| \leq \lambda\varepsilon$. By Theorem 5.2.1

and (8), (9), there exist constants A and B such that if $\omega(\delta) \leq (\lambda AK)^{-1}$ then $H_{\varepsilon, \delta}(F_{\lambda\varepsilon}) \leq B(\lambda K)^2/\delta$. Hence the functional dimension

$$r(F_i(G^*, \{p_i\}, \{q_i\})) \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 \log_2 \frac{B(\lambda K)^2}{\delta}}{\log_2 \delta} = 1$$

This proves the theorem.

From Theorem 5.3.1 and the properties of functional dimension (§ 1) we have the following result, which is a stronger form of Theorem 4.6.1.

COROLLARY 5.3.1. *For any continuous functions $\{p_i(x, y)\}$ and continuously differentiable functions $\{q_i(x, y)\}$ and every region D the set of linear superpositions $F(D, \{p_i\}, \{q_i\})$ is nowhere dense in any space of functions that has in every region $G \subset D$ functional "dimension" greater than 1.*

Remark 5.3.1. All the results about linear superpositions of the form $\sum_{i=1}^N p_i(x, y) f_i(q_i(x, y))$ remain valid if we assume that $\{f_i(t)\}$ are arbitrary bounded measurable functions.

§ 4. Variation of superpositions of smooth functions

Let G_n be a closed region of the space of the variables x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$). A function $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is called a superposition of order s generated by the functions of k ($k > 1$) variables

$$f_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\alpha}(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, s; \beta_i = 1, 2, \dots, k)$$

if it is defined in G by relations