

# §5. Instability of the representation of functions as superpositions of smooth functions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 5. *Instability of the representation of functions  
as superpositions of smooth functions*

Let  $A$  be a set of functions of  $n$  variables and  $B$  a set of functions of  $k$  variables ( $k < n$ ). Suppose that a function  $F(x_1, \dots, x_n) \in A$  is in a region  $G_n$  of the space  $x_1, x_2, \dots, x_n$  an  $s$ -fold superposition, generated by a system of functions  $\{f_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)\}$  of  $B$ .

We say that this superposition is  $(A, B)$ -stable in  $G_n$  if every function  $\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) \in A$  can be represented in  $G_n$  as the  $s$ -fold superposition of the same form of functions  $\{\tilde{f}_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, t_2, \dots, t_k)\}$  of  $B$  such that

$$\begin{aligned} \max_{\alpha; \beta_1, \dots, \beta_\alpha} \sup_t & \left| \tilde{f}_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k) - f_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k) \right| \\ & \leq \lambda \sup_{x \in G_n} \left| \tilde{F}(x_1, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n) \right|, \end{aligned}$$

where  $\lambda$  is a constant not depending either on  $\tilde{F}$  or on the  $\{\tilde{f}_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}\}$ .

We denote by  $C_{\omega(\delta)}^{(1)}$  the space of all continuously differentiable functions of  $k$  variables whose partial derivatives have modulus of continuity  $\omega(\delta)$  ( $\omega(\delta) \rightarrow 0$  as  $\delta \rightarrow 0$ ).

**THEOREM 5.5.1.** *Suppose that each function  $F(x_1, \dots, x_n) \in A$  is in some region  $D_n$  of the space  $x_1, \dots, x_n$  a superposition of order  $s$  of functions of  $k$  variables  $\{f_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)\}$  belonging to  $C_{\omega(\delta)}^{(1)}$  ( $k < n$ ). If for any subregion  $G_n \subset D_n$  the functional "dimension" of  $A$  at  $F(x_1, \dots, x_n) \in A$  is greater than  $k$ , then the function  $F(x_1, \dots, x_n)$  cannot be an  $(A, C_{\omega(\delta)}^{(1)})$ -stable superposition in any such region  $G \subset D_n$ .*

*Proof.* Assume the contrary, that is, in a region  $G_n \subset D_n$  the function  $F(x_1, \dots, x_n) \in A$  is an  $(A, C_{\omega(\delta)}^{(1)})$ -stable  $s$ -fold superposition of functions  $\{f_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)\}$  of  $C_{\omega(\delta)}^{(1)}$ . Then any function  $\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) \in A$  can be represented as the superposition of the same form of functions  $\{\tilde{f}_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)\}$  of  $C_{\omega(\delta)}^{(1)}$  such that

$$\max_{\alpha; \beta_1, \dots, \beta_\alpha} \sup_t \left| \varphi_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k) \right| \leq \lambda \sup_{x \in G_n} \left| \tilde{F} - F \right|,$$

where  $\varphi_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha} = \tilde{f}_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha} - f_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}$ . By Lemma 5.4.2 we have (for definiteness,  $k > 1$ )

$$\begin{aligned} \tilde{F} - F &= \sum_{\alpha; \beta_1, \dots, \beta_\alpha} p_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(x_1, \dots, x_n) \\ &\times \varphi_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(q_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha, 1}(x_1, \dots, x_n), \dots, q_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha, k}(x_1, \dots, x_n)) + R(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

where  $|R(x_1, \dots, x_n)| \leq \gamma(\varepsilon)\varepsilon$ ,  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , and

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \max_{\alpha; \beta_1, \dots, \beta_\alpha} \sup_t |\varphi_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)| \\ &\leq \lambda \sup_{x \in G_n} |\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)|. \end{aligned}$$

That  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  follows from the fact that as  $\varepsilon \rightarrow 0$  the quantity

$$\varepsilon' = \max_{\alpha; \beta_1, \dots, \beta_\alpha} \sum_{i=1}^k \sup \left| \frac{\partial \varphi_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)}{\partial t_i} \right| \rightarrow 0,$$

provided only that the modulus of continuity of the partial derivatives of the functions  $\{\varphi_{\beta_1, \dots, \beta_\alpha}(t_1, \dots, t_k)\}$  is fixed. By 5.1.10 it follows that  $r(A, F) \leq k$  in some subregion  $G_n \subset D_n$ . So we have obtained a contradiction to the assumption that  $r(A, F) > k$  in any subregion  $G_n \subset D_n$  and this proves the theorem.

#### REFERENCES

- [1] HILBERT, D. Mathematische Probleme. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* (1900), 253-297; *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3 (1935), 290-329.
- [2] OSTROWSKI, A. Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. *Math. Z.* 8 (1920), 241-298.
- [3] HILBERT, D. Über die Gleichung neunten Grades. *Math. Ann.* 97 (1927), 243-250; *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2 (1933), 393-400.
- [4] VITUSHKIN, A. G. On Hilbert's thirteenth problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 95 (1954), 701-704.
- [5] BIEBERBACH, L. Bemerkung zum dreizehnten Hilbertschen Problem. *J. Reine Angew. Math.* 165 (1931), 89-92.
- [6] ——— Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme“. *Naturwissenschaften* 51 (1930), 1101-1111.
- [7] KOLMOGOROV, A. N. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of fewer variables. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 108 (1956), 179-182. *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 17 (1961), 369-373.
- [8] ARNOL'D, V. I. On functions of three variables. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 114 (1957), 679-681.
- [9] KOLMOGOROV, A. N. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 114 (1957), 953-956. *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 28 (1963), 55-59.