

1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ON THE EVALUATION OF GAUSSIAN SUMS FOR NON-PRIMITIVE DIRICHLET CHARACTERS

by Henri JORIS

1. INTRODUCTION

Let χ be a Dirichlet character mod m . We denote the conductor of χ by f and the corresponding primitive character by ψ . For a natural number α , we have the Gaussian sum

$$\mathcal{G}(\alpha, \chi) = \sum_{k \bmod m} \chi(k) \exp\left(2\pi i \frac{k\alpha}{m}\right).$$

We will write $\tau(\chi)$ for $\mathcal{G}(1, \chi)$. It is well known that

$$\mathcal{G}(\alpha, \chi) = \bar{\chi}(\alpha) \tau(\chi), \tag{1}$$

if χ is primitive, i.e. if $\chi = \psi$. For non primitive characters, (1) does not hold; according to H. Hasse [1], one has the following result:

THEOREM A. Let χ, m, ψ, f be as above. For $\alpha \in \mathbf{N}$ we put $\alpha_0 = \alpha/(\alpha, m)$, $m_0 = m/(\alpha, m)$. Then we have:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}(\alpha, \chi) &= 0 && \text{if } f \nmid m_0, \\ \mathcal{G}(\alpha, \chi) &= \frac{\varphi(m)}{\varphi(m_0)} \mu\left(\frac{m_0}{f}\right) \psi\left(\frac{m_0}{f}\right) \bar{\psi}(\alpha_0) \tau(\psi) && \text{if } f \mid m_0. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Here, as throughout this note, φ and μ stand for the Euler totient and the Moebius function.

In [1], theorem A is proved in an elementary way, using several steps of reduction. See also [2].

In the present note we give another evaluation of $\mathcal{G}(\alpha, \chi)$, using the functional equation for Dirichlet L -series.

THEOREM B. Let m, χ, f, ψ be as above. We put

$$q = \prod_{\substack{p|m \\ p \nmid f}} p, \quad R = \frac{m}{fq}$$

where p denotes rational primes. Let the multiplicative function g be defined by

$$g(n) = \mu((n, q)) \varphi((n, q)) \bar{\psi}(n).$$

Then we have:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}(\alpha, \chi) &= 0 \text{ if } R \nmid \alpha \\ \mathcal{G}(Rn, \chi) &= \mu(q) \psi(q) \tau(\psi) R g(n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. PROOF OF THEOREM B

For a Dirichlet character χ mod m let the function $L(s, \chi)$ be given by

$$L(s, \chi) = \sum_1^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \quad \text{Re } s > 1.$$

The series defines an analytic function for $\text{Re } s > 1$, which can be extended to a meromorphic function on the whole complex plane, with at most one simple pole at $s = 1$. If χ is primitive, then $L(s, \chi)$ satisfies the equation

$$L(1-s, \chi) = m^{s-1} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left(e^{-\frac{\pi is}{2}} + \chi(-1) e^{\frac{\pi is}{2}} \right) \tau(\chi) L(s, \bar{\chi}). \quad (4)$$

Because of (1), this can also be written, for $\text{Re } s > 1$, as

$$L(1-s, \chi) = m^{s-1} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left(e^{-\frac{\pi is}{2}} + \chi(-1) e^{\frac{\pi is}{2}} \right) \sum_1^{\infty} \mathcal{G}(n, \chi) n^{-s}. \quad (5)$$

Whereas (4) holds only for primitive characters, (5) turns out to be valid in the general case. In fact, a much more general formula is proved in [3], th. 6.1; if we put there $x = \alpha = 0$, $\alpha_n = \chi(n)$ and observe that $\mathcal{G}(-n, \chi) = \chi(-1) \mathcal{G}(n, \chi)$, we get (5) immediately. But also most of the classical (= non-adelic) proofs of (4) will give (5) after very small changes. The only use of the primitivity of χ in these proofs is that they replace $\mathcal{G}(n, \chi)$ by $\bar{\chi}(n) \tau(\chi)$ at some stage (See for instance [7]).

Now let χ, m, ψ, f be as in the theorem. We have, by the Euler-product,

$$\begin{aligned} L(1-s, \chi) &= L(1-s, \psi) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^{1-s}} \right) \\ &= L(1-s, \psi) \mu(q) q^{s-1} \psi(q) \prod_{p|q} (1 - p\bar{\psi}(p) p^{-s}) \end{aligned} \quad (6)$$