

4. Special cases

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\psi(\alpha_0)\psi(q) = \psi(m_0/f)\psi(n)$$

or

$$\bar{\psi}(n)\psi(q) = \bar{\psi}(\alpha_0)\psi\left(\frac{m_0}{f}\right) \tag{16}$$

Multiplying (14), (15) and (16) we find $K(\alpha) = H(\alpha)$.

4. SPECIAL CASES

(a) Theorem *B* implies that $\tau(\chi) \neq 0$ if and only if $R = 1$, that is, if and only if m/f is squarefree and has no common divisor with f . We have then

$$\tau(\chi) = \mu\left(\frac{m}{f}\right)\psi\left(\frac{m}{f}\right)\tau(\psi) \tag{17}$$

and

$$\mathcal{G}(\alpha, \chi) = g(\alpha)\tau(\chi) \tag{18}$$

On the other hand, if m/f is not square free or has a common divisor with f , then the right hand side of (17) is zero. So, (17) holds for any character χ . For another proof of this see [4], p. 148.

(b) If $\chi = \chi_0 =$ principal character mod m , then $f = 1$, $\psi \equiv 1$, $\tau(\psi) = 1$, $q = \tilde{m} =$ squarefree kernel of m , $R = m/\tilde{m}$, and $\mathcal{G}(\alpha, \chi_0) = C_m(\alpha) =$ RAMANUJANS SUM.

Theorem *B* gives the well-known formula:

$$C_m(\alpha) = 0 \quad \text{if} \quad \frac{m}{\tilde{m}} \nmid \alpha$$

$$C_m\left(\frac{m}{\tilde{m}}n\right) = \frac{m}{\tilde{m}}\mu(\tilde{m})\mu((n, \tilde{m}))\varphi((n, \tilde{m})).$$

From (17) we get for all m

$$C_m(1) = \mu(m).$$

5. Remarks: (a) It is clear that $\mathcal{G}(\alpha, \chi)$ cannot vanish identically. So by 4. (a), formula (1) can only hold if $R = 1$, and if $g(\alpha) = \bar{\chi}(\alpha)$ for all α . But this is only possible if $q = 1$, i.e. if $m = f$. This shows that (1) characterises primitive characters, a fact proved by T.M. Apostol [5].

(b) The last named author also proved ([6]), that if the functional equation (4) holds, then χ is primitive. One may prove this by comparing (4) and (5), which gives $\mathcal{G}(\alpha, \chi) = \bar{\chi}(\alpha) \tau(\chi)$; this in turn implies that χ is primitive, by the former remark. Still another proof is as follows: If $q = 1$, then $L(s, \chi) = L(s, \psi)$ and $L(s, \bar{\chi}) = L(s, \bar{\psi})$. So if (4) holds, we get $m = f$, hence χ is primitive. If $q > 1$, then $L(s, \chi)$ must have nonreal zeroes on the imaginary axis; hence if (4) holds, $L(s, \bar{\chi})$ has zeroes on the line $\operatorname{Re} s = 1$, contradicting a well known theorem on L -series.

REFERENCES

- [1] HASSE, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. 2. ed. Springer (1964), pp. 444-450.
- [2] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. The exceptional set in Goldbach's problem. *Acta Arith.* XXVII (1975), pp. 353-370.
- [3] BERNDT, B. C. and L. SCHOENFELD. Periodic analogues of the Euler-Maclaurin and Poisson summation formulas with applications to number theory. *Acta Arith.* XXVIII (1975), pp. 23-68.
- [4] DAVENPORT, H. *Multiplicative Number Theory*. Chicago (1967).
- [5] APOSTOL, T. M. Euler's φ -function and separable Gauss sums. *Proc. AMS* 24 (1970), pp. 482-485.
- [6] ——— Dirichlet L -functions and Dirichlet characters, *Proc. AMS* 31 (1972), pp. 384-386.
- [7] CHANDRASEKHARAN, K. *Arithmetical functions*. Springer (1970), pp. 146-154.

(Reçu le 28 septembre 1976)

H. Joris

Section de Mathématiques
Université de Genève
Case 124
1211 Genève 24