

## 2. A USEFUL IDENTITY

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Each factor in the product on the right is the square root of an expression of the shape

$$(3) \quad (S^{*4} - 2SR_h S^{*2} \cos \psi + S^2 R_h^2) / S^{*2} (S^2 - 2SR_h \cos \psi + R_h^2),$$

where  $z_h = R_h e^{i\phi_h}$  and  $\psi = \theta - \phi_h$ . One sees that the turning points of (3) as a function of  $\psi$  occur when  $\sin \psi = 0$  and that the minimal value of (3) is

$$(4) \quad ((S^{*2} + SR_h) / S^* (S + R_h))^2$$

One easily confirms that (4) is minimal for  $0 \leq R_h \leq R$  when  $R_h = R$ , whence we obtain

$$|G|_S \geq |F|_S \left( \frac{S^{*2} + SR}{S^* (S + R)} \right)^n,$$

and the assertion of the lemma follows.

The lemma is “best possible”; the function  $F(z) = \left( \frac{S^* (R - z)}{S^{*2} - Rz} \right)^n$  being the extreme case. I am indebted to Michel Waldschmidt for mentioning the result of the lemma to me. The lemma improves upon a similar result obtainable via Jensen’s theorem, (see, for example, Tijdeman [26], p. 3).

According to the above observations, our principal attention below is directed towards the finding of upper bounds for ratios of the shape (1). Although the principles of our techniques are not new, many of the details have been little more than folklore and are presented here explicitly for the first time.

## 2. A USEFUL IDENTITY

The following lemma is presented in somewhat exaggerated generality. Its implications will become clear when below we come to look at specific examples.

LEMMA 2. *Let  $S^*, S$  be real numbers satisfying  $S^* \geq S > 0$  and let  $G$  be a function of the shape*

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\sigma} b_k g_k(z),$$

*$b_1, \dots, b_{\sigma}$  complex constants, where  $g_1, \dots, g_{\sigma}$  are functions holomorphic in some open set containing the disc  $|z - z_0| \leq S^*$ . Further let  $z_1, \dots, z_{\sigma}$  be points in the disc  $|z - z_0| < S$  and let  $t_1, \dots, t_{\sigma}$  be non-negative integers.*

Finally denote by  $\Delta_{ji}$  the cofactor of the typical element in the  $\sigma \times \sigma$  determinant

$$\Delta = |g_i^{(tj)}(z_j)|_{1 \leq i, j \leq \sigma},$$

suppose that  $\Delta \neq 0$ , and assume the notational conventions of the introduction above. Then for  $w$  such that  $|w - z_0| = S^*$  we have

$$(5) \quad G(w) = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \sum_{k=1}^{\sigma} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\gamma-z_0|=S} \frac{\Delta_{\lambda,k}}{\Delta} g_k(w) \left(\frac{d}{dz}\right)^{t_\lambda} G(\gamma) \frac{d\gamma}{(\gamma-z)} \right\}_{z=z_\lambda}$$

and it follows that if  $G$  does not vanish identically

$$(6) \quad |G|_{S^*} / |G|_S \leq \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \max \left| \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{\Delta_{\lambda,k}}{\Delta} g_k(w) \right| \cdot S \frac{t_\lambda!}{(S - |z_\lambda - z_0|)^{t_\lambda+1}}$$

*Proof.* By the residue theorem the right-hand side of (5) is

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{\Delta_{\lambda,k}}{\Delta} g_k(w) G^{(t_\lambda)}(z_\lambda) \\ &= \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{h=1}^{\sigma} b_h g_k(w) \sum_{\lambda=1}^{\sigma} g_h^{(t_\lambda)}(z_\lambda) \frac{\Delta_{\lambda,k}}{\Delta} \\ &= \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{h=1}^{\sigma} b_h g_k(w) \delta_{hk}, \quad (\delta_{hk}, \text{ the Kronecker delta}) \\ &= G(w), \end{aligned}$$

as was asserted. Having thus established the identity (5), we conclude that

$$|G|_{S^*} \leq \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \max \left| \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{\Delta_{\lambda,k}}{\Delta} g_k(w) \left| \frac{1}{2\pi} \oint G(\gamma) \frac{t_\lambda!}{(\gamma - z_\lambda)^{t_\lambda+1}} \right| \right|$$

and estimating the integral on the circle  $|\gamma - z_0| = S$ , the assertion (6) is immediate.

We have stated the lemma in such generality as might be appropriate for the purposes of this note. The reader should observe that, moreover, the same idea can be used to obtain any combination

$$\sum_{k=1}^{\sigma} b_k h_k$$

on the left-hand side of an identity similar to (5); this is useful in isolating the coefficients  $b_k$  which is necessary when one is investigating the number of points in a disc at which the given function  $G(z)$  may be small; see theorem 2 below for details. We remark that the identity (5) should be viewed as a (degenerate) case of the integral form of the Hermite interpolation formula.