Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉNÉRALISATION DES SUITES SPECTRALES
Autor: Teleman, Costake / Man, Ta
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48920

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GÉNÉRALISATION DES SUITES SPECTRALES

par Costake TELEMAN et TA MAN

Le but de ce travail est de généraliser les suites exactes de Gysin et de Wang en utilisant le formalisme développé par l'un des auteurs dans [3].

1. Rappelons quelques définitions et résultats donnés dans [3]. Dans ce travail, une *paire* sera toujours une paire de groupes, formée par un groupe arbitraire et par un sous-groupe de celui-ci. Une paire (G, G_*) sera nommée *triviale* si $G_* = G$. A chaque paire (G, G_*) on associe l'ensemble G/G_* des classes $g\,G_*, g \in G$, et nous considérerons la classe G_* comme *point base* de G/G_*. Un morphisme de paires $f: (G, G_*) \to (G', G'_*)$ est un homomorphisme de G dans G' qui envoie G_* dans G'_*. *Le noyeau, l'image* et *la coimage* sont définis par les formules

$$\ker f = (f^{-1}G'_*\,, G_*)\,, \quad \operatorname{im} f = (f\,G, f\,G \cap G'_*)\,, \quad \operatorname{coim} f = (G, f^{-1}G'_*)\,.$$

Le morphisme f définit une application d'espaces à points base

$$\bar{f}: \quad G/G_* \to G'/G'_*\,.$$

Cette application possède la propriété importante suivante: Toutes les fibres de $\bar{f}$ sont équivalentes à l'ensemble $f^{-1}\,G'_*/G_*$.

Si deux sous-groupes A, B d'un groupe G sont tels que l'ensemble $A\,.\,B$ des produits $x\,.\,y$ avec $x \in A$ et $y \in B$ est un sous-groupe de G, nous dirons que A, B sont *quasi-permutables.*

Un *q-morphisme* est un morphisme de paires $f: (G, G_*) \to (G', G'_*)$ ayant la propriété: fG est quasi-permutable avec G'_*. Le conoyeau d'un q-morphisme f est la paire

$$\operatorname{coker} f = (G', f\,G\,.\,G'_*)\,.$$

L'application $\bar{f}$ induite par un morphisme f est injective si et seulement si $\ker f$ est une paire triviale. L'application $\bar{f}$ sera surjective si et seulement si f est un q-morphisme et si $\operatorname{coker} f$ est une paire triviale.

Les paires triviales seront désignées par 1.

Une suite de deux morphismes

$$(1) \qquad (G, G_*) \xrightarrow{f} (G', G'_*) \xrightarrow{g} (G'', G''_*)$$

sera nommée *semi-exacte* si $g \circ f$ est un morphisme trivial, donc si $fG \subset g^{-1} G''_*$. L'inclusion $fG \subset g^{-1} G''_*$ induit un morphisme i: $\operatorname{im} f \to \ker g$. Le morphisme i est une équivalence si et seulement si $fG \,.\, G'_* = g^{-1} G''_*$. Dans le cas où cette dernière condition est remplie, nous dirons que la suite (1) est *exacte*. La suite (1) sera exacte si et seulement si la suite

$$G/G_* \xrightarrow{\bar{f}} G'/G'_* \xrightarrow{\bar{g}} G''/G''_*$$

est exacte dans la catégorie des ensembles à points base.

Pour tout q-morphisme f on peut écrire la suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker f \longrightarrow (G, G_*) \xrightarrow{f} (G', G'_*) \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 1 \,.$$

Un complexe de paires est une suite semi-exacte de q-morphismes

$$(2) \qquad \ldots \longrightarrow (G^i, G^i_*) \xrightarrow{d^i} (G^{i+1}, G^{i+1}_*) \longrightarrow \ldots$$

Exemple. Soit

$$\ldots \longrightarrow G^i \xrightarrow{h^i} G^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

une suite arbitraire d'homomorphismes de groupes. Soit G^i_* le sous-groupe de G^i engendré par les éléments de la forme $x\,y\,x^{-1}$, où $x \in \operatorname{im} h^{i-1}$ et $y \in \operatorname{im}(h^{i-1} \circ h^{i-2})$. Le système $\{G^i, G^i_*, h^i\}$ est un complexe de paires.

Les *paires dérivées* et les *ensembles de cohomologie* du complexe (2) sont définies par les formules

$$\mathscr{H}^i(K) = \left((d^i)^{-1} G^{i+1}_*,\ (d^{i-1} G^{i-1}) \,.\, G^i_*\right),$$

$$H^i(K) = (d^i)^{-1} G^{i+1}_* / (d^{i-1} G^{i-1}) \,.\, G^i_* \,.$$

Un *complexe filtré* est un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[d] & \cdot \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & (G^i_p, G^i) \arrow[r, "-d^i_p"] \arrow[u] & (G^{i+1}_p, G^{i+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (G^i_{p+1}, G^i) \arrow[r, "-d^i_{p+1}"] \arrow[u] & (G^{i+1}_{p+1}, G^{i+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

tel que les flèches verticales sont des morphismes induits par des inclusions, les lignes sont des complexes de paires et dans lequel, pour chaque couple (p, i), l'un au moins des groupes G^i_{p+1}, im d^{i-1}_p est un sous-groupe invariant de G^i_p.

Exemple. Considérons un diagramme commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & & & & & \\
X_p \arrow[d, "\ell_p"'] \arrow[dr, "\alpha_p"] & X \arrow[rrrr

et soit K^i_* le sous-groupe invariant de $G^i = \operatorname{im} G^{\alpha^i}$ engendré par K^i. Les groupes $G^i_p = H^i_p \,.\, K^i_*, K^i_*$ et les homomorphismes $d^i_p = G^{h^i} \mid G^i_p$ forment un complexe filtré de paires.

Etant donné un complexe filtré de paires, on peut former les groupes

$$Z^{p,q}_r = \{\, x \in G^{p+q}_p \,;\quad dx \in G^{p+q+1}_{p+r} \,\}\,;\quad B^{p,q}_r = G^{p+q}_p \cap dG^{p+q-1}_{p-r}$$
$$= dZ^{p-r,\,q+r-1}_r\,,$$

les paires

$$\mathscr{E}^{\,p,q}_r = (Z^{p,q}_r\,,\ Z^{p+1,q-1}_{r-1} \,.\, B^{p,\,q}_{r-1})\,,$$

ainsi que les ensembles

$$E^{p,q}_r = Z^{p,q}_r \,/\, (Z^{p+1,q-1}_{r-1} \,.\, B^{p,\,q}_{r-1})\,.$$

Les morphismes d^i_p induisent des morphismes

$$d^{p,q}_r :\quad \mathscr{E}^{\,p,q}_r \to \mathscr{E}^{\,p+r,q-r+1}_r$$

et les compositions $d^{p+r,q-r+1}_r \circ d^{p,q}_r$ sont des morphismes triviaux.

On a des équivalences canoniques

$$\mathscr{E}^{\,p,\,q}_{r+1} \to \mathscr{H}^{p,q}(\mathscr{E}_r)\,.$$

Dans la suite, nous supposerons que chaque groupe G^i_p est un sous-groupe invariant de G^i_{p-1}.

Introduisons les groupes

$$G^i = \cup_p G^i_p,\ Z^{p,q}_\infty = \{x \in G^{p+q}_p;\ dx \in G^{p+q+1}\},\ B^{p,q}_\infty = G^{p+q}_p \cap dG^{p+q-1}$$

et les paires $\mathscr{E}^{\,p,q}_\infty = (Z^{p,q}_\infty,\ Z^{p+1,q-1}_\infty \,.\, B^{p,q}_\infty)$. Soient $E^{p,q}_\infty$ les ensembles associés à ces dernières paires.

Un complexe filtré de paires est nommé *régulier* dans le cas où, pour chaque indice i, il existe un entier $n(i)$ tel que $G^i_{n(i)+1} = G^i_*$. Nous aurons les relations $\cap_p G^i_p = G^i_*$.

Considérons les complexes $K_p = \{G^i_p, G^i_*, d^i_p\}$, $K = \{G^i, G^i_*, d^i\}$, où $d^i \mid G^i_p = d^i_p$. Les inclusions $G^i_p \subset G^i, G^i_{p+1} \subset G^i_p$ induisent des morphismes de complexes $j_p : K_p \to K$, $i_p : \operatorname{im} j_{p+1} \to \operatorname{im} j_p$; ils existent aussi des morphismes de paires

$$\mathscr{H}^i(j_p) : \mathscr{H}^i(K_p) \to \mathscr{H}^i(K)$$
$$h^i_p : \operatorname{im} \mathscr{H}^i(j_{p+1}) \to \operatorname{im} \mathscr{H}^i(j_p)\,.$$

On a les formules

$$\mathscr{H}^i(K)_p = \operatorname{im} \mathscr{H}^i(j_p) = (Z^{p,i-p}_\infty,\ G^i_* \,.\, B^{p,i-p}_\infty)$$
$$\operatorname{coker} h^i_p = (Z^{p,i-p}_\infty, Z^{p+1,i-p-1}_\infty \,.\, B^{p,i-p}_\infty) = \mathscr{E}^{\,p,i-p}_\infty\,.$$

Il en résulte qu'une relation de la forme $\mathscr{E}_\infty^{p,q} = 1$ a pour conséquence l'existence d'une équivalence $\mathscr{H}^i(K)_{p+1} \to \mathscr{H}^i(K)_p$ et qu'une relation du type $\mathscr{H}^{p+q}(K)_{p+1} = 1$ entraîne l'égalité $\mathscr{H}^{p+q}(K)_p = \mathscr{E}_\infty^{p,q}$.

2. THÉORÈME 1. Supposons qu'un complexe filtré de paires est régulier et qu'il existe pour ce complexe des entiers $r > 1$, Q tels qu'on ait $E_r^{p,q} = 1$ chaque fois que $q \neq Q$. Dans ces hypothèses, on a des équivalences canoniques

$$H^n(K) \approx E_r^{n-Q,Q}.$$

Démonstration. Les hypothèses faites entraînent les relations $E_s^{p,q} = 1$ pour $s \geqslant r$ et $q \neq Q$ et $d_s^{p,q} = 1$ pour $s \geqslant r$. Il en résulte que $E_\infty^{p,q}$ est un ensemble canoniquement équivalent à $E_r^{p,q}$. Les remarques faites précédemment montrent qu'on a $H^n(K) \approx H^n(K)_{n-Q} \approx E_\infty^{n-Q,Q}$.

THÉORÈME 2. Soit K un complexe filtré régulier de paires tel qu'il existent des entiers $n \geqslant r \geqslant 2$ tels qu'on ait $E_r^{p,q} = 1$ pour $q \neq 0, n$. Dans ce cas, on a *la suite exacte de Gysin généralisée*

$$\ldots \longrightarrow E_r^{i,o} \longrightarrow H^i(K) \longrightarrow E_r^{i-n,n} \longrightarrow E_r^{i+1,o} \longrightarrow H^{i+1}(K) \longrightarrow \ldots$$

Démonstration. Le complexe K étant régulier, on a $E_\infty^{p,q} = 1$ pour $q \neq 0, n$ et, quelque soit l'indice i, on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathscr{E}_\infty^{i,o} \longrightarrow \mathscr{H}^i(K)_{i-n} \longrightarrow \mathscr{E}_\infty^{i-n,n} \longrightarrow 1$$

et une équivalence canonique $\mathscr{H}^i(K)_{i-n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i(K)$; la suite exacte induit une suite exacte d'ensembles à points base

$$1 \longrightarrow E_\infty^{i,o} \longrightarrow H^i(K)_{i-n} \longrightarrow E_\infty^{i-n,n} \longrightarrow 1.$$

Les seules différentielles $d_s^{p,q}$ qui ne sont pas triviales sont celles pour lesquelles $s = n + 1$. Pour $s \neq n$ on aura des équivalences $E_{s+2}^{p,q} \approx E_{s+1}^{p,q}$. Pour $s = n + 1$, les seules différentielles non triviales sont

$$d_{n+1}^{i-n,n} : \mathscr{E}_{n+1}^{i-n,n} \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}^{i+1,o}$$

et on a la suite exacte de paires

$$1 \longrightarrow \mathscr{H}^{i-n,n}(\mathscr{E}_{n+1}) \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}^{i-n,n} \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}^{i+1,o} \longrightarrow \mathscr{H}^{i+1}(\mathscr{E}_{n+1}) \longrightarrow 1$$

qui induit une suite exacte d'ensembles à points base

$$1 \longrightarrow E_{n+2}^{i-n,n} \longrightarrow E_{n+1}^{i-n,n} \longrightarrow E_{n+1}^{i+1,o} \longrightarrow E_{n+2}^{i+1,o} \longrightarrow 1.$$

En combinant les relations obtenues, on trouve facilement la suite exacte indiquée dans l'énoncé.

D'une manière tout à fait analogue, en utilisant les différentielles

$$d_n^{o,i} : \mathscr{E}_n^{o,i} \longrightarrow \mathscr{E}_n^{n,i+1-n},$$

on démontre le théorème suivant, qui fournit une généralisation de la suite exacte de Wang:

THÉORÈME 3. Soit K un complexe filtré régulier de paires, tel qu'il existe des entiers $n \geqslant r \geqslant 1$ avec la propriété $E_r^{p,q} = 1$ pour $p \neq 0, n$. Dans ces conditions, on a une suite exacte d'ensembles à points base du type suivant

$$\ldots \longrightarrow E_r^{n,i-n} \longrightarrow H^i(K) \longrightarrow E_r^{o,i} \longrightarrow E_r^{n,i+1-n} \longrightarrow$$
$$H^{i+1}(K) \longrightarrow \ldots .$$

REFÉRENCES

GODEMENT, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Herman, Paris, 1958.
SPANIER, E. H. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., 1966.
TELEMAN, C. et TELEMAN M., *Elemente de teoria grupurilor cu aplicații în topologie și fizica*. Ed. Stiințifica, Bucuresti, 1973.

(Reçu le 7 octobre 1976)

Costake Teleman
Université de Bucarest
Faculté des Mathématiques

Ta Man
Université de Bucarest
Faculté des Mathématiques