PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André FONTAINE

I. ITÉRATION D'UN ENDOMORPHISME (SINGULIER)

Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés

E_n étant un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{C}$, soit g un endomorphisme de E_n dans E_n; nous le supposons singulier, c'est-à-dire dim Ker (g) $\geqslant 1$; Ker (g) est le sous-espace propre afférent à la valeur propre $\lambda = 0$ de g.

A) On considère la suite des « noyaux itérés de g »:

(1) $$\operatorname{Ker}(g) = K_1\ ,\ \operatorname{Ker}(g^2) = K_2, \dots, \operatorname{Ker}(g^q) = K_q, \dots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés, $K_q \subset K_{q+1}$. La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

(2) $$d_1 = \dim(K_1) \leqslant d_2 = \dim(K_2) \leqslant \dots \leqslant d_q = \dim(K_q) \leqslant \dots \leqslant n\,.$$

B) Il existe un unique entier p tel que

$$d_1 < d_2 < \dots d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \dots\,, \qquad \text{c'est-à-dire}$$
$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \dots$$

(inclusion au sens strict).

$d_p = d$ est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que $d = r$, r étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 0$, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda = 0$ de l'équation caractéristique de g [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations $0 < p \leqslant d = r \leqslant n$.

p se nommera *l'indice* de g pour la valeur propre $\lambda = 0$; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur g pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum $d = r$.

D) *Le profil* d'un endomorphisme singulier g est formé des p nombres $\{ d_1, d_2, ..., d_{p-1}, d_p = r \}$. Cette suite, extraite de (2), est strictement *croissante*. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points $M_1, M_2, ..., M_p, M_{p+1}, ...$; le point M_q ayant pour coordonnées $x_q = q \in \mathbf{N}$, $y_q = d_q$. On y adjoindra le point M_0 (0, 0) qui correspond à $g^0 = e$, endomorphisme identique, $d_0 = 0$. La ligne brisée de sommets successifs $M_0 = 0, M_1, M_2, ..., M_p, M_{p+1} ...$ prendra également le nom de profil de l'endomorphisme singulier g. A partir du profil de g, on construira la suite de ses *sauts*

(3) $\{ \delta_1, \delta_2, ..., \delta_q, ... \}$ où $\delta_q = d_q - d_{q-1}$
(en particulier $\delta_1 = d_1 - d_0 = d_1$).

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

THÉORÈME DE LA CONVEXITÉ. $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$.

Soit S_{q+1} un sous-espace supplémentaire de K_q sur K_{q+1}. Considérons l'image $g(S_{q+1})$ de S_{q+1} par g.

1°) Soit x un vecteur non nul de S_{q+1}. On a $g^{q+1}(x) = 0$ et $g^q(x) \neq 0$ donc $g(x) \in K_q$ et $g(x) \notin K_{q-1}$,
d'où

(4) $g(S_{q+1}) \subset K_q$; $g(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{ 0 \}$.

On déduit de (4)

(5) $\dim g(S_{q+1}) \leqslant d_q - d_{q-1}$.

2°) Montrons que la restriction de g à S_{q+1} est *injective*.

Soit $\{ v_1, v_2, ..., v_\alpha \}$ où $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$ une base de S_{q+1}. Une partie génératrice de $g(S_{q+1})$ est $\Sigma = \{ g(v_1), g(v_2), ..., g(v_\alpha) \}$. Si l'on montre que Σ est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient α scalaires $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\alpha$ tels que

$$\rho_1 g(v_1) + \rho_2 g(v_2) + ... + \rho_\alpha g(v_\alpha) = 0 .$$

On a donc $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + ... + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$ et aussi $W \in K_1 \cap S_{q+1}$.

Mais $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{ 0 \}$, d'où $W = 0$ et $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_\alpha = 0$, ce qui établit que Σ est libre.

Il en résulte

(6) $\dim g(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leqslant d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_{p-1} \geqslant \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \ldots$$

3º) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\dfrac{d_q - d_{q-1}}{1}$ $\geqslant \dfrac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}\, M_q) \geqslant$ pente (M_q, M_{q+1}).

II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r1} (\lambda_2 - \lambda)^{r2} \ldots (\lambda_s - \lambda)^{rs} \, [r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n]$.

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_\nu = f - \lambda_\nu e$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, e étant l'endomorphisme identique; g_ν admet la valeur propre 0, à l'ordre r_ν. Pour chaque ν, on détermine le profil de g_ν pour la valeur propre 0, soit $\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p\nu}^\nu \}$ où $d_q = \dim \operatorname{Ker} (g_\nu^q)$. Le noyau maximum de g_ν sera désigné par K^ν $[K^\nu = \operatorname{Ker} (g_\nu^{p\nu})]$. On a:

$$\begin{cases} K_1^\nu \subset K_2^\nu \subset \ldots \subset K_{p\nu}^\nu = K^\nu = K_{p\nu+1}^\nu = \ldots \\ d_1^\nu < d_2^\nu \ldots < d_{p\nu}^\nu = d^\nu = d_{p\nu+1} = \ldots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^\nu = r_\nu$.
Par définitions;

$$\left[\begin{array}{l} 1^{\circ})\ \{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p\nu}^\nu \} = \text{profil de } g_\nu \text{ pour } \lambda = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_\nu \\ \\ 2^{\circ})\ p_\nu = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_\nu. \end{array}\right.$$

B) Théorème de la disjonction. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{0\}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).

C) *Etude de l'application* g_α^k $(k \geqslant 1)$

1°) *L'application* g_α^k *applique* K^α *dans* K^α. On a vu que $g_\alpha = g_\alpha^1$ applique K^α dans K^α, d'où, a fortiori

$$g_\alpha^k [K^\alpha] \subset K^\alpha \quad \text{(Inclusion stricte).}$$

2°) *L'application* g_α^k *restreinte à* K^β $(\beta \neq \alpha)$ *est une bijection de* K^β *sur* K^β.

a) g_α^k applique K^β dans K^β. Remarquons que $g_1 = f - \lambda_1 e$ et $g_2 = f - \lambda_2 e$ commutent, donc $g_1^k \circ g_2^{p_2} = g_2^{p_2} \circ g_1^k$ (on a pris pour simplifier $\alpha = 1$, $\beta = 2$).

$x \in K^2 \Rightarrow g_2^{p_2}(x) = 0 \Rightarrow (g_1^k \circ g_2^{p_2})(x) = 0 \Rightarrow g_2^{p_2}[g_1^k(x)] \Rightarrow g_1^k(x) \in K^2$ ou $g_1^k [K^2] \subset K^2$.

b) Mais cette application de K^β dans K^β est bijective car son noyau se réduit à 0. Soit en effet $x \in K^\beta$ tel que $g_\alpha^k(x) = 0$, on a $x \in K_k^\alpha \subset K^\alpha$, d'où $x \in K^\alpha \cap K^\beta$ et $x = 0$ d'après B).

D) *Comparaison* de K^μ et J^ν. Désignons par J^ν le sous-espace image de $g_\nu^{p_\nu}$: $J_\nu = g_\nu^{p_\nu}(E_n)$.

1°) Supposons $\nu \neq \mu$. Le théorème C 2°) où $k = p_\nu$ donne $K^\mu = g_\nu^{p_\nu}(K^\mu)$. Mais $K^\mu \subset E_n$. Donc $K^\mu \subset g_{g\nu}^{p_\nu}(E_n) = J^\nu$.

2°) Prenons $\nu = \mu$. On sait que $K_{2p_\nu}^\nu = K_{p_\nu}^\nu = K^\nu$. Si $x \in K^\nu \cap J^\nu$ on a $g_\nu^{p_\nu}(x) = 0$ et il existe $y \in E_n$ tel que $x = g_\nu^{p_\nu}(y)$.
Par suite $g_\nu^{2p_\nu}(y) = 0$ et $y \in K^\nu$ d'où $x = 0$. Donc $K^\nu \cap J^\nu = \{0\}$. Mais comme $K^\nu = \operatorname{Ker}[g^{p_\nu}]$ et $J^\nu = \operatorname{Im}[g_\nu^{p_\nu}]$, on a $\dim K^\nu + \dim J^\nu = n$.
Il en résulte que K^ν et J^ν sont deux sous-espaces supplémentaires de E_n. Au total:

$$\text{Si } \nu \neq \mu : \quad K^\nu \subset J^\mu \quad \text{et} \quad K^\mu \subset J^\nu,$$
$$\text{Si } \nu = \mu : \quad K^\nu \oplus J^\nu = E_n .$$

E) THÉORÈME. $K^1 \oplus K^2 \oplus \dots \oplus K^s = E_n$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \dots, \rho$ et ν des entiers distincts. On a $K^\alpha + K^\beta + \dots + K^\rho \subset J^\nu$ d'où $(K^\alpha + K^\beta + \dots + K^\rho) \cap K^\nu = \{0\}$. La somme $K^1 + K^2 + \dots + K^s$ est donc directe et comme sa dimension est $d_1 + d_2 + \dots + d_s = n$ on a $K^1 \oplus K^2 \oplus \dots \oplus K^s = E_n$.

3°) Prenant pour chaque K^ν une base $\{\beta^\nu\}$ (formée de $r_\nu = d_\nu$ vecteurs) la *juxtaposition de ces s bases* donnera une base $\{(\beta)\}$ de E_n.

III. Réduite transjordanienne de f

A) *Choix d'une première base de réduction.* g_v applique K^v dans K^v. Donc $f = g_v + \lambda_v e$ applique aussi K^v dans K^v. La matrice M traduisant f sur la base (β) précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés :*

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
M^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & M^2 & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & & \ddots & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & M^s
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\updownarrow \beta^1 \\
\updownarrow \beta^2 \\
\\
\updownarrow \beta^s
\end{array}
$$

Blocs

M^1: matrice (r_1, r_1)
M^2: matrice (r_2, r_2)
- - - - - - - - - - - - - - -
M^s: matrice (r_s, r_s)

Tous les éléments hors des blocs sont nuls; β^v = base quelconque de K^v.

B) *Construction de la réduite transjordanienne T de f.* Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque λ_v, au lieu d'une base quelconque β^v de K^v, une « base hiérarchisée » de K^v. Pour simplifier les notations, l'indice v sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre (λ_v) on ait (pour g_v):

les noyaux itérés $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^v$, $\quad (p=4)$,

leurs dimensions $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_3 = 8$, $d_4 = 9 = d$, $\quad (d=r=9)$,

les sauts décroissants $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 1$.

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de K_4 et remontant vers K_1; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque S_4 des supplémentaires de K_3 dans K_4, dim $S_4 = \delta_4 = 1$. Dans S_4 prenons une base formée d'un vecteur ε_9.

2°) On sait que $g(S_4) \subset K_3$ et $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$. Par suite, $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$. Or dim $[K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$. Cette inégalité établit que $K_2 \oplus g(S_4)$ est un sous-espace strict de K_3. On choisit l'un quelconque Ω des sous-espaces supplémentaires de $K_2 \oplus g(S_4)$ sur K_3; $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$. $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$ est un sous-espace supplémentaire de K_2 sur K_3.

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2\,.$$

On prendra pour base de S_3: $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9),\ \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$.

3°) On part de S_3 et l'on forme $g(S_3)$; $\dim g(S_3) = \delta_3$ et $g(S_3) \subset K_2$, $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$, $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$, car actuellement on a $\delta_3 = \delta_2$. Donc $g(S_3)$ est un sous-espace supplémentaire $g(S_3) = S_2$ de K_1 sur K_2; $\delta_3 > \delta_4$ avait nécessité l'introduction d'un sous-espace Ω pour obtenir $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$; ici $\delta_2 = \delta_3$ et directement $S_2 = g(S_3)$. On prendra comme base de S_2 les deux vecteurs ($\delta_2 = 2$): $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$ et $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$.

4°) $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$; $g(S_2)$ est un sous-espace strict de K_1, lequel a pour dimension $d_1 = \delta_1 = 4$. Prenons l'un quelconque des supplémentaires Ω' de $g(S_2)$ sur K_1 $(= S_1)$, $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$, $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$.

Prenons comme base de $K_1 = S_1$: $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$, où $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$, $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$, ε_1 et ε_2 formant une base quelconque de Ω'. Au total sur la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$ l'application g_ν de K^ν dans K^ν $(g_\nu = f - \lambda_\nu e)$ se traduira par le bloc T'^ν dit bloc transjordanien. On déduira de T'^ν le nouveau bloc transjordanien T^ν traduisant sur la même base (base « canonique pour λ_ν ») l'application f de K^ν dans K^ν. Le passage de T'^ν à T^ν se fera en remplaçant par λ_ν les zéros de la diagonale principale de T'^ν.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\\ \varepsilon_7\\ \varepsilon_8\\ \varepsilon_9
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
\lambda_\nu&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda_\nu&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda_\nu&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda_\nu&0&1&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&\lambda_\nu&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda_\nu&0&1&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&\lambda_\nu&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda_\nu&1\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda_\nu
\end{array}\right]$$

$\longleftarrow S_1 = K_1 \longrightarrow\!\!\longleftarrow S_2 \longrightarrow\!\!\longleftarrow S_3 \longrightarrow\!\!\longleftarrow S_4 \longrightarrow$ $\qquad$ $\longleftarrow \delta_1 = d_1 \longrightarrow\!\!\longleftarrow \delta_2 \longrightarrow\!\!\longleftarrow \delta_3 \longrightarrow\!\!\longleftarrow \delta_4 \longrightarrow$

Matrice T'^ν (g_ν restreinte à K^ν) $\qquad$ Matrice T^ν (f restreinte à K^ν)

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de $S_{p\nu}$ supplémentaire arbitraire de $K^{\nu}_{p\nu-1}$ sur $K^{\nu}_{p\nu}$.

Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordaniennes

$$\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

T' $\qquad\qquad$ T''

T' = matrice diagonale
= réduite transjordanienne de f'

T'' = matrice « one by one step»
= réduite transjordanienne de f''

f' et f'' ont le même spectre: $\{\underbrace{\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3}\}$.

Mais les profils sont

1°) pour $f' \{d_1^1 = 1 = d_1 = r_1\}$
$\{d_1^2 = 4 = d_2 = r_2\}$
$\{d_1^3 = 2 = d_3 = r_3\}$

Tous les indices = 1

2°) pour $f'' \{d_1^1 = d_1 = r_1\}$
$\{d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2\}$
$\{d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3\}$

Tous les sauts = 1

Remarque. Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1\,,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».

IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude de deux matrices

A) *Spécifique d'un endomorphisme f de E_n.* On choisit, une fois pour toutes, une relation d'ordre ω sur **C**. Le spécifique de f est formé

1°) *du spectre ordonné de* f : $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s},$

$$(\lambda_1 \,\omega\, \lambda_2 \,\omega \ldots \lambda_{s-1} \,\omega\, \lambda_s) .$$

2°) *des* s *profils* relatifs à chaque valeur propre:

$$\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p\nu-1}^\nu, d_{p\nu}^\nu = d_\nu = r_\nu \} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) .$$

B) *Spécifique d'une matrice* A (n, n). Soient deux bases $(\mathscr{J})$ et $(\mathscr{J}')$ de E_n. Considérons les endomorphismes f se traduisant par A sur $(\mathscr{J})$, f' se traduisant par A sur $(\mathscr{J}')$.

On démontre facilement que le spécifique de f coincide avec celui de f' (même spectre ordonné et mêmes profils). Ce qui justifie la définition:

Le spécifique d'une matrice A (n, n) *est le spécifique commun à tous les endomorphismes se traduisant par* A, sur toutes bases possibles de E_n.

C) *Première bijection.* Il y a bijection entre

$$\{ \text{matrices transjordaniennes } T \} \text{ et } \{ \text{spécifiques } (S) \}$$

$T \leftrightarrow S$ (S étant le spécifique qu'enregistre T).

D) *Seconde bijection.*

a) Soit un représentant A d'une classe d'équivalence (C_A) dans l'ensemble des matrices (n, n). Considérons une base quelconque $(\mathscr{J})$ et soit f l'endomorphisme traduit par A sur $(\mathscr{J})$; prenons la réduite transjordanienne T de f: *le même* f est traduit

α) par A sur $(\mathscr{J})$.

β) par T sur (S) (base canonique de f).

b) Dans une même classe (C_A), il ne peut y avoir deux représentants transjordaniens distincts. Supposons deux transjordaniennes équivalentes; elles traduisent le même endomorphisme f sur deux bases d'où

spécifique de f = spécifique de T = spécifique de T'.

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* $\{$ matrices transjordaniennes $T\}$ *et* $\{$ Classes d'équivalence $(C_A)\}$
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

$\{$ classes d'équivalence $(C_A)\}$ et $\{$ spécifiques $(S)\}$.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) Théorème. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes J.*

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. Applications

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^ν et les indices p_ν) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0\}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$

Donc, π étant un diviseur de P,

$$\pi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha 1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha 2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\alpha s}$$

où $\alpha_1 \leqslant r_1, \alpha_2 \leqslant r_2, \dots, \alpha_s \leqslant r_s$. On démontre que $\alpha_\nu = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$, c'est-à-dire:

Théorème de l'indice. Le polynôme minimum de A (défini à une constante multiplicative près) est

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p1} (\lambda - \lambda_2)^{p2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{ps}.$$

Cas particuliers.

1°) Si A est diagonalisable: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$.

2°) Si A est « one by one step »: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r1} (\lambda - \lambda_2)^{r2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{rs}$ $= P(\lambda)$.

B) *Matrices commutant avec une matrice donnée A.* Soit $E' = \{ X \in E; AX = XA \{$ où E est l'espace vectoriel des matrices n, n sur le corps $\mathbf{C}$ $(A \in E')$. E' est un sous-espace vectoriel de E. Sa dimension dépend bien entendu du spécifique de A. On peut démontrer qu'elle est égale à la *somme des carrés de tous les sauts.*

$$\dim(E') = \sum_{\nu=1}^{s} \Big[\sum_{q=1}^{p\nu} (\delta_q^\nu)^2\Big]$$

Cas particuliers:

1°) A diagonalisable: $\dim(E') = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_s^2$.

2°) A « one by one step »: $\dim(E') = r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$.

C) *Série entière en A.* Il est facile de former la puissance $q$ième d'une transjordanienne, d'où la puissance $q$ième d'une matrice A. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q z^q$$

de rayon de convergence R. On considère la série de matrice A

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q A^q.$$

Elle est convergente de somme la matrice $f(A)$ à condition que $|\lambda_\nu| < R$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$. Passant par l'intermédiaire de la réduite transjordanienne T de A, on construit effectivement

$$f(T) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q T^q$$

au moyen des valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées pour $z = \lambda_1, \ldots, z = \lambda_s$. On a alors $f(A) = P \circ f(T) \circ P^{-1}$, P étant la matrice de passage ($A = P T P^{-1}$). On peut obtenir un théorème généralisant celui des polynômes minimums

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(z) \text{ admette } \lambda_v \text{ comme racine d'ordre } \geqslant p_v$$
$$v = 1, 2, \ldots, s\,.$$

D) *Limite lorsque* $q \to \infty$ *de la direction* (Δ_q) *transformée par* f^q *de la direction donnée* (Δ_0). Soit $x \neq 0$, fixe, un vecteur directeur de (Δ_0); le vecteur $f^q(x)$ ou tout vecteur W_q colinéaire à ce dernier, est directeur de (Δ_q). Si $\lim\limits_{q\to\infty} W_q = L$, la direction limite de (Δ_q) sera celle de vecteur directeur L.

On décompose $x = x^1 + x^2 + \ldots + x^s$; $x^v \in K^v = K^v_{pv}$ et obtient

$$(1) \quad f^q(x^v) = \lambda_v^q x^v + C_q^1 \lambda_v^{q-1} g_v(x^v) + \ldots + C_q^{pv-1} \lambda_v^{q-pv+1} g_v^{pv-1}(x^v)\,.$$

On classe les valeurs propres par module décroissant:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_s|\,.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et $x^1 \neq 0$, on obtient le résultat connu: il y a une limite de (Δ_q) de vecteur directeur $L \in K_1^1$ que l'on détermine.
Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, l'étude se poursuit au moyen de (1) ...

E) *Résolution du système différentiel linéaire.*

$$(\Sigma) \quad \frac{dX}{dt} = A X$$

$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ = unicolonne de n fonctions inconnues de **C** dans **C**, $A\,(n, n)$ connue. On transmue (Σ) en (S) par la matrice de passage P telle que $T = P^{-1} A P$, T réduite transjordanienne de A, en faisant le changement d'inconnue $X = P Y$:

$$(S) \quad \frac{dY}{dt} = T Y.$$

Ce système (S) se décompose en

$$\frac{dY^1}{dt} = T^1 Y^1 , \quad \frac{dY^2}{dt} = T^2 Y^2 , \quad \ldots , \quad \frac{dY^s}{dt} = T^s Y^s ,$$

T^ν étant le bloc transjordanien afférent à λ_ν.

Le système $\dfrac{dY^\nu}{dt} = T^\nu Y^\nu$ sera très simple, la dérivée d'une composante y_k étant simplement $\dfrac{dy_k}{dt} = \lambda_\nu y_k + \alpha y_{k+l}$, $\alpha = 0$ ou 1, $0 < l \leqslant r_\nu - k$

l'intégration de (S) est alors immédiate; on en déduit celle de (Σ).

1°) *Système* (Σ) *à solutions exponentielles pures ou à solutions algébrico-exponentielles* (x_k = somme de produits d'exponentielles par des constantes ou somme de produits d'exponentielles par des monômes dont l'un au moins a un degré $\geqslant 1$).

(Σ) à solutions exponentielles pures $\Leftrightarrow$ A diagonalisable

2°) *Systèmes* (Σ) *monoréductible*. C'est un système où la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre n par rapport à une composante, les autres composantes s'obtenant par dérivations de celle-là. On montre que

(Σ) monoréductible $\Leftrightarrow$ A « one by one step ».

(Reçu le 5 septembre 1976)

A. Fontaine
129, rue de l'Abbé-Groult
F-75015 — Paris