

# I. Itération d'un endomorphisme (singulier)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André FONTAINE

## I. ITÉRATION D'UN ENDOMORPHISME (SINGULIER)

### *Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés*

$E_n$  étant un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbf{C}$ , soit  $g$  un endomorphisme de  $E_n$  dans  $E_n$ ; nous le supposons singulier, c'est-à-dire  $\dim \text{Ker}(g) \geq 1$ ;  $\text{Ker}(g)$  est le sous-espace propre afférent à la valeur propre  $\lambda = 0$  de  $g$ .

A) On considère la suite des « noyaux itérés de  $g$  »:

$$(1) \quad \text{Ker}(g) = K_1, \text{Ker}(g^2) = K_2, \dots, \text{Ker}(g^q) = K_q, \dots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés,  $K_q \subset K_{q+1}$ . La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

$$(2) \quad d_1 = \dim(K_1) \leq d_2 = \dim(K_2) \leq \dots \leq d_q = \dim(K_q) \leq \dots \leq n.$$

B) Il existe un unique entier  $p$  tel que

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \dots, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \dots$$

(inclusion au sens strict).

$d_p = d$  est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que  $d = r$ ,  $r$  étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda = 0$  de l'équation caractéristique de  $g$  [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations  $0 < p \leq d = r \leq n$ .

$p$  se nommera l'indice de  $g$  pour la valeur propre  $\lambda = 0$ ; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur  $g$  pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum  $d = r$ .

D) *Le profil* d'un endomorphisme singulier  $g$  est formé des  $p$  nombres  $\{d_1, d_2, \dots, d_{p-1}, d_p = r\}$ . Cette suite, extraite de (2), est strictement *croissante*. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points  $M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1}, \dots$ ; le point  $M_q$  ayant pour coordonnées  $x_q = q \in \mathbf{N}, y_q = d_q$ . On y adjoindra le point  $M_0(0, 0)$  qui correspond à  $g^0 = e$ , endomorphisme identique,  $d_0 = 0$ . La ligne brisée de sommets successifs  $M_0 = 0, M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1} \dots$  prendra également le nom de *profil* de l'endomorphisme singulier  $g$ . A partir du profil de  $g$ , on construira la suite de ses *sauts*

$$(3) \quad \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q, \dots \} \text{ où } \delta_q = d_q - d_{q-1}$$

(en particulier  $\delta_1 = d_1 - d_0 = d_1$ ).

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

THÉORÈME DE LA CONVEXITÉ.  $\delta_{q+1} \leq \delta_q$ .

Soit  $S_{q+1}$  un sous-espace supplémentaire de  $K_q$  sur  $K_{q+1}$ . Considérons l'image  $g(S_{q+1})$  de  $S_{q+1}$  par  $g$ .

1°) Soit  $x$  un vecteur non nul de  $S_{q+1}$ . On a  $g^{q+1}(x) = 0$  et  $g^q(x) \neq 0$  donc  $g(x) \in K_q$  et  $g(x) \notin K_{q-1}$ ,  
d'où

$$(4) \quad g(S_{q+1}) \subset K_q; \quad g(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{0\}.$$

On déduit de (4)

$$(5) \quad \dim g(S_{q+1}) \leq d_q - d_{q-1}.$$

2°) Montrons que la restriction de  $g$  à  $S_{q+1}$  est *injective*.

Soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_\alpha\}$  où  $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$  une base de  $S_{q+1}$ . Une partie génératrice de  $g(S_{q+1})$  est  $\Sigma = \{g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_\alpha)\}$ . Si l'on montre que  $\Sigma$  est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient  $\alpha$  scalaires  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\alpha$  tels que

$$\rho_1 g(v_1) + \rho_2 g(v_2) + \dots + \rho_\alpha g(v_\alpha) = 0.$$

On a donc  $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$  et aussi  $W \in K_1 \cap S_{q+1}$ .

Mais  $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{0\}$ , d'où  $W = 0$  et  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\alpha = 0$ , ce qui établit que  $\Sigma$  est libre.

Il en résulte

$$(6) \quad \dim g(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$$

Rapprochons (5) et (6):  $d_{q+1} - d_q \leq d_q - d_{q-1}$  ou  $\delta_{q+1} \leq \delta_q$ , d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{p-1} \geq \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \dots$$

3°) La ligne brisée profil de  $g$  pour  $\lambda = 0$  est convexe car  $\frac{d_q - d_{q-1}}{1} \geq \frac{d_{q+1} - d_q}{1}$  s'écrit pente  $(M_{q-1}, M_q) \geq$  pente  $(M_q, M_{q+1})$ .

## II. ANALYSE D'UN ENDOMORPHISME $f$ . THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de  $f$

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} [r_1 + r_2 + \dots + r_s = n].$$

Le spectre de  $f$  s'écrit:  $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des  $s$  valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers  $g_v = f - \lambda_v e$  ( $v = 1, 2, \dots, s$ ),  $e$  étant l'endomorphisme identique;  $g_v$  admet la valeur propre 0, à l'ordre  $r_v$ . Pour chaque  $v$ , on détermine le profil de  $g_v$  pour la valeur propre 0, soit  $\{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\}$  où  $d_q = \dim \text{Ker}(g_v^q)$ . Le noyau maximum de  $g_v$  sera désigné par  $K^v$  [ $K^v = \text{Ker}(g_v^{p_v})$ ]. On a:

$$\begin{cases} K_1^v \subset K_2^v \subset \dots \subset K_{p_v}^v = K^v = K_{p_v+1}^v = \dots \\ d_1^v < d_2^v < \dots < d_{p_v}^v = d^v = d_{p_v+1}^v = \dots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que  $d^v = r_v$ .

Par définitions;

$$\begin{cases} 1^\circ) \{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\} = \text{profil de } g_v \text{ pour } \lambda = 0 \\ \quad \quad \quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_v \\ 2^\circ) p_v = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_v. \end{cases}$$

B) THÉORÈME DE LA DISJONCTION. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{0\}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).