I. Itération d'un endomorphisme (singulier)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André Fontaine

I. Itération d'un endomorphisme (singulier)

Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés

E_n étant un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{C}$, soit g un endomorphisme de E_n dans E_n; nous le supposons singulier, c'est-à-dire dim Ker $(g) \geqslant 1$; Ker (g) est le sous-espace propre afférent à la valeur propre $\lambda = 0$ de g.

A) On considère la suite des « noyaux itérés de g »:

(1) $$\operatorname{Ker}(g) = K_1 \, , \ \operatorname{Ker}(g^2) = K_2, \ldots, \operatorname{Ker}(g^q) = K_q, \ldots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés, $K_q \subset K_{q+1}$. La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

(2) $$d_1 = \dim(K_1) \leqslant d_2 = \dim(K_2) \leqslant \ldots \leqslant d_q = \dim(K_q) \leqslant \ldots \leqslant n \, .$$

B) Il existe un unique entier p tel que

$d_1 < d_2 < \ldots d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \ldots ,$ c'est-à-dire
$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \ldots$
(inclusion au sens strict).

$d_p = d$ est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que $d = r$, r étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 0$, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda = 0$ de l'équation caractéristique de g [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations $0 < p \leqslant d = r \leqslant n$.

p se nommera *l'indice* de g pour la valeur propre $\lambda = 0$; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur g pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum $d = r$.

D) *Le profil* d'un endomorphisme singulier g est formé des p nombres $\{ d_1, d_2, ..., d_{p-1}, d_p = r \}$. Cette suite, extraite de (2), est strictement *croissante*. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points $M_1, M_2, ..., M_p, M_{p+1}, ...$; le point M_q ayant pour coordonnées $x_q = q \in \mathbf{N}$, $y_q = d_q$. On y adjoindra le point $M_0\,(0, 0)$ qui correspond à $g^0 = e$, endomorphisme identique, $d_0 = 0$. La ligne brisée de sommets successifs $M_0 = 0, M_1, M_2, ..., M_p, M_{p+1}$ ... prendra également le nom de profil de l'endomorphisme singulier g. A partir du profil de g, on construira la suite de ses *sauts*

(3) $\{ \delta_1, \delta_2, ..., \delta_q, ... \}$ où $\delta_q = d_q - d_{q-1}$
(en particulier $\delta_1 = d_1 - d_0 = d_1$).

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

Théorème de la convexité. $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$.

Soit S_{q+1} un sous-espace supplémentaire de K_q sur K_{q+1}. Considérons l'image $g\,(S_{q+1})$ de S_{q+1} par g.

1°) Soit x un vecteur non nul de S_{q+1}. On a $g^{q+1}\,(x) = 0$ et $g^q\,(x) \neq 0$ donc $g\,(x) \in K_q$ et $g\,(x) \notin K_{q-1}$,
d'où

(4) $g\,(S_{q+1}) \subset K_q\,;\quad g\,(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{ 0 \}$.

On déduit de (4)

(5) $\dim g\,(S_{q+1}) \leqslant d_q - d_{q-1}$.

2°) Montrons que la restriction de g à S_{q+1} est *injective*.

Soit $\{ v_1, v_2, ..., v_\alpha \}$ où $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$ une base de S_{q+1}. Une partie génératrice de $g\,(S_{q+1})$ est $\Sigma = \{ g\,(v_1), g\,(v_2), ..., g\,(v_\alpha) \}$. Si l'on montre que Σ est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient α scalaires $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\alpha$ tels que

$$\rho_1\, g\,(v_1) + \rho_2\, g\,(v_2) + ... + \rho_\alpha\, g\,(v_\alpha) = 0\,.$$

On a donc $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + ... + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$ et aussi $W \in K_1 \cap S_{q+1}$.

Mais $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{ 0 \}$, d'où $W = 0$ et $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_\alpha = 0$, ce qui établit que Σ est libre.

Il en résulte

(6) $\dim g\,(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leqslant d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_{p-1} \geqslant \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \ldots$$

3º) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\dfrac{d_q - d_{q-1}}{1}$ $\geqslant \dfrac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}\, M_q) \geqslant$ pente (M_q, M_{q+1}).

II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r1} (\lambda_2 - \lambda)^{r2} \ldots (\lambda_s - \lambda)^{rs} \, [r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n]$.

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_\nu = f - \lambda_\nu e$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, e étant l'endomorphisme identique; g_ν admet la valeur propre 0, à l'ordre r_ν. Pour chaque ν, on détermine le profil de g_ν pour la valeur propre 0, soit $\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p\nu}^\nu \}$ où $d_q = \dim \operatorname{Ker}(g_\nu^q)$. Le noyau maximum de g_ν sera désigné par K^ν $[K^\nu = \operatorname{Ker}(g_\nu^{p\nu})]$. On a:

$$\begin{cases} K_1^\nu \subset K_2^\nu \subset \ldots \subset K_{p\nu}^\nu = K^\nu = K_{p\nu+1}^\nu = \ldots \\ d_1^\nu < d_2^\nu \ldots < d_{p\nu}^\nu = d^\nu = d_{p\nu+1} = \ldots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^\nu = r_\nu$.
Par définitions;

$$\left| \begin{array}{l} 1^{\text{o}})\ \{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p\nu}^\nu \} = \text{profil de } g_\nu \text{ pour } \lambda = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_\nu \\ 2^{\text{o}})\ p_\nu = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_\nu. \end{array} \right.$$

B) Théorème de la disjonction. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{ 0 \}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).