

II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leq d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leq \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{p-1} \geq \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \dots$$

3°) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\frac{d_q - d_{q-1}}{1} \geq \frac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}, M_q) \geq$ pente (M_q, M_{q+1}) .

II. ANALYSE D'UN ENDOMORPHISME f . THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} [r_1 + r_2 + \dots + r_s = n].$$

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_v = f - \lambda_v e$ ($v = 1, 2, \dots, s$), e étant l'endomorphisme identique; g_v admet la valeur propre 0, à l'ordre r_v . Pour chaque v , on détermine le profil de g_v pour la valeur propre 0, soit $\{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\}$ où $d_q = \dim \text{Ker}(g_v^q)$. Le noyau maximum de g_v sera désigné par K^v [$K^v = \text{Ker}(g_v^{p_v})$]. On a:

$$\begin{cases} K_1^v \subset K_2^v \subset \dots \subset K_{p_v}^v = K^v = K_{p_v+1}^v = \dots \\ d_1^v < d_2^v < \dots < d_{p_v}^v = d^v = d_{p_v+1}^v = \dots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^v = r_v$.

Par définitions;

$$\begin{cases} 1^\circ) \{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\} = \text{profil de } g_v \text{ pour } \lambda = 0 \\ \quad \quad \quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_v \\ 2^\circ) p_v = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_v. \end{cases}$$

B) THÉORÈME DE LA DISJONCTION. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{0\}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).

C) Etude de l'application g_α^k ($k \geq 1$)

1°) L'application g_α^k applique K^α dans K^α . On a vu que $g_\alpha = g_\alpha^1$ applique K^α dans K^α , d'où, a fortiori

$$g_\alpha^k [K^\alpha] \subset K^\alpha \quad (\text{Inclusion stricte}).$$

2°) L'application g_α^k restreinte à K^β ($\beta \neq \alpha$) est une bijection de K^β sur K^β .

a) g_α^k applique K^β dans K^β . Remarquons que $g_1 = f - \lambda_1 e$ et $g_2 = f - \lambda_2 e$ commutent, donc $g_1^k \circ g_2^{p_2} = g_2^{p_2} \circ g_1^k$ (on a pris pour simplifier $\alpha = 1$, $\beta = 2$).

$$x \in K^2 \Rightarrow g_2^{p_2}(x) = 0 \Rightarrow (g_1^k \circ g_2^{p_2})(x) = 0 \Rightarrow g_2^{p_2}[g_1^k(x)] \Rightarrow g_1^k(x) \in K^2$$

ou $g_1^k [K^2] \subset K^2$.

b) Mais cette application de K^β dans K^β est bijective car son noyau se réduit à 0. Soit en effet $x \in K^\beta$ tel que $g_\alpha^k(x) = 0$, on a $x \in K_k^\alpha \subset K^\alpha$, d'où $x \in K^\alpha \cap K^\beta$ et $x = 0$ d'après B).

D) Comparaison de K^μ et J^ν . Désignons par J^ν le sous-espace image de $g_\nu^{p_\nu}$: $J^\nu = g_\nu^{p_\nu}(E_n)$.

1°) Supposons $\nu \neq \mu$. Le théorème C 2°) où $k = p_\nu$ donne $K^\mu = g_\nu^{p_\nu}(K^\mu)$. Mais $K^\mu \subset E_n$. Donc $K^\mu \subset g_\nu^{p_\nu}(E_n) = J^\nu$.

2°) Prenons $\nu = \mu$. On sait que $K_{2p_\nu}^\nu = K_{p_\nu}^\nu = K^\nu$. Si $x \in K^\nu \cap J^\nu$ on a $g_\nu^{p_\nu}(x) = 0$ et il existe $y \in E_n$ tel que $x = g_\nu^{p_\nu}(y)$.

Par suite $g_\nu^{2p_\nu}(y) = 0$ et $y \in K^\nu$ d'où $x = 0$. Donc $K^\nu \cap J^\nu = \{0\}$. Mais comme $K^\nu = \text{Ker}[g_\nu^{p_\nu}]$ et $J^\nu = \text{Im}[g_\nu^{p_\nu}]$, on a $\dim K^\nu + \dim J^\nu = n$.

Il en résulte que K^ν et J^ν sont deux sous-espaces supplémentaires de E_n .
Au total:

$$\text{Si } \nu \neq \mu: \quad K^\nu \subset J^\mu \quad \text{et} \quad K^\mu \subset J^\nu,$$

$$\text{Si } \nu = \mu: \quad K^\nu \oplus J^\nu = E_n.$$

E) THÉORÈME. $K^1 \oplus K^2 \oplus \dots \oplus K^s = E_n$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \dots, \rho$ et ν des entiers distincts. On a $K^\alpha + K^\beta + \dots + K^\rho \subset J^\nu$ d'où $(K^\alpha + K^\beta + \dots + K^\rho) \cap K^\nu = \{0\}$. La somme $K^1 + K^2 + \dots + K^s$ est donc directe et comme sa dimension est $d_1 + d_2 + \dots + d_s = n$ on a $K^1 \oplus K^2 \oplus \dots \oplus K^s = E_n$.

3°) Prenant pour chaque K^ν une base $\{\beta^\nu\}$ (formée de $r_\nu = d_\nu$ vecteurs) la juxtaposition de ces s bases donnera une base $\{(\beta)\}$ de E_n .