II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leqslant d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \dots \geqslant \delta_{p-1} \geqslant \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \dots$$

3°) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\dfrac{d_q - d_{q-1}}{1} \geqslant \dfrac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}\, M_q) \geqslant$ pente (M_q, M_{q+1}).

II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r1} (\lambda_2 - \lambda)^{r2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{rs} \, [r_1 + r_2 + \dots + r_s = n] \, .$$

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}$, $\underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}$, ..., $\underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_\nu = f - \lambda_\nu e$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$, e étant l'endomorphisme identique; g_ν admet la valeur propre 0, à l'ordre r_ν. Pour chaque ν, on détermine le profil de g_ν pour la valeur propre 0, soit $\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \dots, d_{p\nu}^\nu \}$ où $d_q = \dim \operatorname{Ker} (g_\nu^q)$. Le noyau maximum de g_ν sera désigné par K^ν $[K^\nu = \operatorname{Ker} (g_\nu^{p\nu})]$. On a:

$$\begin{cases} K_1^\nu \subset K_2^\nu \subset \dots \subset K_{p\nu}^\nu = K^\nu = K_{p\nu+1}^\nu = \dots \\ d_1^\nu < d_2^\nu \dots < d_{p\nu}^\nu = d^\nu = d_{p\nu+1} = \dots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^\nu = r_\nu$.
Par définitions;

$$\begin{cases} 1°) \ \{ d_1^\nu, d_2^\nu, \dots, d_{p\nu}^\nu \} = \text{profil de } g_\nu \text{ pour } \lambda = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_\nu \\ 2°) \ p_\nu = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_\nu. \end{cases}$$

B) Théorème de la disjonction. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{ 0 \}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).

C) *Etude de l'application* g_α^k $(k \geqslant 1)$

1°) *L'application* g_α^k *applique* K^α *dans* K^α. On a vu que $g_\alpha = g_\alpha^1$ applique K^α dans K^α, d'où, a fortiori

$$g_\alpha^k [K^\alpha] \subset K^\alpha \quad \text{(Inclusion stricte).}$$

2°) *L'application* g_α^k *restreinte à* K^β $(\beta \neq \alpha)$ *est une bijection de* K^β *sur* K^β.

a) g_α^k applique K^β dans K^β. Remarquons que $g_1 = f - \lambda_1 e$ et $g_2 = f - \lambda_2 e$ commutent, donc $g_1^k \circ g_2^{p_2} = g_2^{p_2} \circ g_1^k$ (on a pris pour simplifier $\alpha = 1$, $\beta = 2$).

$x \in K^2 \Rightarrow g_2^{p_2}(x) = 0 \Rightarrow (g_1^k \circ g_2^{p_2})(x) = 0 \Rightarrow g_2^{p_2}[g_1^k(x)] \Rightarrow g_1^k(x) \in K^2$ ou $g_1^k [K^2] \subset K^2$.

b) Mais cette application de K^β dans K^β est bijective car son noyau se réduit à 0. Soit en effet $x \in K^\beta$ tel que $g_\alpha^k(x) = 0$, on a $x \in K_k^\alpha \subset K^\alpha$, d'où $x \in K^\alpha \cap K^\beta$ et $x = 0$ d'après B).

D) *Comparaison* de K^μ et J^ν. Désignons par J^ν le sous-espace image de $g_\nu^{p_\nu}$: $J_\nu = g_\nu^{p_\nu}(E_n)$.

1°) Supposons $\nu \neq \mu$. Le théorème C 2°) où $k = p_\nu$ donne $K^\mu = g_\nu^{p_\nu}(K^\mu)$. Mais $K^\mu \subset E_n$. Donc $K^\mu \subset g_{g\nu}^{p_\nu}(E_n) = J^\nu$.

2°) Prenons $\nu = \mu$. On sait que $K_{2p_\nu}^\nu = K_{p_\nu}^\nu = K^\nu$. Si $x \in K^\nu \cap J^\nu$ on a $g_\nu^{p_\nu}(x) = 0$ et il existe $y \in E_n$ tel que $x = g_\nu^{p_\nu}(y)$.
Par suite $g_\nu^{2p_\nu}(y) = 0$ et $y \in K^\nu$ d'où $x = 0$. Donc $K^\nu \cap J^\nu = \{0\}$. Mais comme $K^\nu = \mathrm{Ker}\,[g^{p_\nu}]$ et $J^\nu = \mathrm{Im}\,[g_\nu^{p_\nu}]$, on a $\dim K^\nu + \dim J^\nu = n$.
Il en résulte que K^ν et J^ν sont deux sous-espaces supplémentaires de E_n.
Au total:

$$\text{Si } \nu \neq \mu: \quad K^\nu \subset J^\mu \quad \text{et} \quad K^\mu \subset J^\nu,$$

$$\text{Si } \nu = \mu: \quad K^\nu \oplus J^\nu = E_n.$$

E) Théorème. $K^1 \oplus K^2 \oplus \ldots \oplus K^s = E_n$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ et ν des entiers distincts. On a $K^\alpha + K^\beta + \ldots + K^\rho \subset J^\nu$ d'où $(K^\alpha + K^\beta + \ldots + K^\rho) \cap K^\nu = \{0\}$. La somme $K^1 + K^2 + \ldots + K^s$ est donc directe et comme sa dimension est $d_1 + d_2 + \ldots + d_s = n$ on a $K^1 \oplus K^2 \oplus \ldots \oplus K^s = E_n$.

3°) Prenant pour chaque K^ν une base $\{\beta^\nu\}$ (formée de $r_\nu = d_\nu$ vecteurs) la *juxtaposition de ces s bases* donnera une base $\{(\beta)\}$ de E_n.