IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude DE DEUX MATRICES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude de deux matrices

A) *Spécifique d'un endomorphisme f de E_n.* On choisit, une fois pour toutes, une relation d'ordre ω sur **C**. Le spécifique de f est formé

1°) *du spectre ordonné de* f : $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s},$

$$(\lambda_1 \ \omega \ \lambda_2 \ \omega \ \ldots \ \lambda_{s-1} \ \omega \ \lambda_s) .$$

2°) *des* s *profils* relatifs à chaque valeur propre:

$$\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p\nu-1}^\nu, d_{p\nu}^\nu = d_\nu = r_\nu \} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s) .$$

B) *Spécifique d'une matrice A (n, n).* Soient deux bases $(\mathscr{J})$ et $(\mathscr{J}')$ de E_n. Considérons les endomorphismes f se traduisant par A sur $(\mathscr{J})$, f' se traduisant par A sur $(\mathscr{J}')$.

On démontre facilement que le spécifique de f coincide avec celui de f' (même spectre ordonné et mêmes profils). Ce qui justifie la définition:

Le spécifique d'une matrice A (n, n) est le spécifique commun à tous les endomorphismes se traduisant par A, sur toutes bases possibles de E_n.

C) *Première bijection.* Il y a bijection entre

$$\{ \text{matrices transjordaniennes } T \} \text{ et } \{ \text{spécifiques } (S) \}$$

$T \leftrightarrow S$ (S étant le spécifique qu'enregistre T).

D) *Seconde bijection.*

a) Soit un représentant A d'une classe d'équivalence (C_A) dans l'ensemble des matrices (n, n). Considérons une base quelconque $(\mathscr{J})$ et soit f l'endomorphisme traduit par A sur $(\mathscr{J})$; prenons la réduite transjordanienne T de f: *le même* f est traduit

α) par A sur $(\mathscr{J})$.

β) par T sur (S) (base canonique de f).

b) Dans une même classe (C_A), il ne peut y avoir deux représentants transjordaniens distincts. Supposons deux transjordaniennes équivalentes; elles traduisent le même endomorphisme f sur deux bases d'où

spécifique de f = spécifique de T = spécifique de T'.

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* $\{$ matrices transjordaniennes $T \}$ *et* $\{$ Classes d'équivalence $(C_A) \}$
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

$\{$ classes d'équivalence $(C_A) \}$ et $\{$ spécifiques $(S) \}$.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) Théorème. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. Applications

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^ν et les indices p_ν) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi .$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} .$$