V. Applications

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* $\{$ matrices transjordaniennes $T\}$ *et* $\{$ Classes d'équivalence $(C_A)\}$

Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

$\{$ classes d'équivalence $(C_A)\}$ et $\{$ spécifiques $(S)\}$.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) Théorème. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan*. Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. Applications

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^ν et les indices p_ν) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$

Donc, π étant un diviseur de P,

$$\pi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha 1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha 2} \ldots (\lambda_s - \lambda)^{\alpha s}$$

où $\alpha_1 \leqslant r_1, \alpha_2 \leqslant r_2, \ldots, \alpha_s \leqslant r_s$. On démontre que $\alpha_\nu = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, c'est-à-dire:

Théorème de l'indice. Le polynôme minimum de A (défini à une constante multiplicative près) est

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p 1} (\lambda - \lambda_2)^{p 2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{p s}.$$

Cas particuliers.

1°) Si A est diagonalisable: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_s)$.

2°) Si A est « one by one step »: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r 1} (\lambda - \lambda_2)^{r 2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{r s} = P(\lambda)$.

B) *Matrices commutant avec une matrice donnée A*. Soit $E' = \{ X \in E; AX = XA \{$ où E est l'espace vectoriel des matrices n, n sur le corps $\mathbf{C}$ $(A \in E')$. E' est un sous-espace vectoriel de E. Sa dimension dépend bien entendu du spécifique de A. On peut démontrer qu'elle est égale à la *somme des carrés de tous les sauts.*

$$\dim(E') = \sum_{\nu=1}^{s} \left[\sum_{q=1}^{p\nu} (\delta_q^\nu)^2 \right]$$

Cas particuliers:

1°) A diagonalisable: $\dim(E') = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_s^2$.

2°) A « one by one step »: $\dim(E') = r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n$.

C) *Série entière en A*. Il est facile de former la puissance $q$ième d'une transjordanienne, d'où la puissance $q$ième d'une matrice A. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q z^q$$

de rayon de convergence R. On considère la série de matrice A

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q A^q.$$

Elle est convergente de somme la matrice $f(A)$ à condition que $|\lambda_\nu| < R$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Passant par l'intermédiaire de la réduite transjordanienne T de A, on construit effectivement

$$f(T) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q T^q$$

au moyen des valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées pour $z = \lambda_1, \ldots, z = \lambda_s$. On a alors $f(A) = P \circ f(T) \circ P^{-1}$, P étant la matrice de passage ($A = P T P^{-1}$). On peut obtenir un théorème généralisant celui des polynômes minimums

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(z) \text{ admette } \lambda_\nu \text{ comme racine d'ordre } \geqslant p_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, s\,.$$

D) *Limite lorsque* $q \to \infty$ *de la direction* (Δ_q) *transformée par* f^q *de la direction donnée* (Δ_0). Soit $x \neq 0$, fixe, un vecteur directeur de (Δ_0); le vecteur $f^q(x)$ ou tout vecteur W_q colinéaire à ce dernier, est directeur de (Δ_q). Si $\lim\limits_{q\to\infty} W_q = L$, la direction limite de (Δ_q) sera celle de vecteur directeur L.

On décompose $x = x^1 + x^2 + \ldots + x^s$; $x^\nu \in K^\nu = K^\nu_{p\nu}$ et obtient

(1) $\quad f^q(x^\nu) = \lambda_\nu^q x^\nu + C_q^1 \lambda_\nu^{q-1} g_\nu(x^\nu) + \ldots + C_q^{p\nu-1} \lambda_\nu^{q-p\nu+1} g_\nu^{p\nu-1}(x^\nu)\,.$

On classe les valeurs propres par module décroissant:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_s|\,.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et $x^1 \neq 0$, on obtient le résultat connu: il y a une limite de (Δ_q) de vecteur directeur $L \in K_1^1$ que l'on détermine.
Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, l'étude se poursuit au moyen de (1) ...

E) *Résolution du système différentiel linéaire.*

$$(\Sigma) \quad \frac{dX}{dt} = A\,X$$

$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ = unicolonne de n fonctions inconnues de **C** dans **C**, $A\,(n, n)$ connue. On transmue (Σ) en (S) par la matrice de passage P telle que $T = P^{-1} A\, P$, T réduite transjordanienne de A, en faisant le changement d'inconnue $X = P\,Y$:

$$(S) \quad \frac{dY}{dt} = T\,Y.$$

Ce système (S) se décompose en

$$\frac{dY^1}{dt} = T^1 Y^1, \quad \frac{dY^2}{dt} = T^2 Y^2, \quad \ldots, \quad \frac{dY^s}{dt} = T^s Y^s,$$

T^ν étant le bloc transjordanien afférent à λ_ν.

Le système $\dfrac{dY^\nu}{dt} = T^\nu Y^\nu$ sera très simple, la dérivée d'une composante y_k étant simplement $\dfrac{dy_k}{dt} = \lambda_\nu y_k + \alpha y_{k+l}$, $\alpha = 0$ ou 1, $0 < l \leqslant r_\nu - k$

l'intégration de (S) est alors immédiate; on en déduit celle de (Σ).

1°) *Système (Σ) à solutions exponentielles pures ou à solutions algébrico-exponentielles* (x_k = somme de produits d'exponentielles par des constantes ou somme de produits d'exponentielles par des monômes dont l'un au moins a un degré $\geqslant 1$).

(Σ) à solutions exponentielles pures $\Leftrightarrow$ A diagonalisable

2°) *Systèmes (Σ) monoréductible.* C'est un système où la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre n par rapport à une composante, les autres composantes s'obtenant par dérivations de celle-là. On montre que

(Σ) monoréductible $\Leftrightarrow$ A « one by one step ».

(Reçu le 5 septembre 1976)

A. Fontaine

129, rue de l'Abbé-Groult
F-75015 — Paris