Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1977)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

Autor: Fontaine, André

Kapitel: V. Applications

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48921

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* { matrices transjordaniennes T} *et* { Classes d'équivalence (C_A) }
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

{ classes d'équivalence (C_A) } et { spécifiques (S) }.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) THÉORÈME. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. APPLICATIONS

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^v et les indices p_v) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$

Donc, π étant un diviseur de P,

$$\pi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\alpha_s}$$

où $\alpha_1 \leqslant r_1, \alpha_2 \leqslant r_2, \dots, \alpha_s \leqslant r_s$. On démontre que $\alpha_\nu = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$, c'est-à-dire:

THÉORÈME DE L'INDICE. Le polynôme minimum de A (défini à une constante multiplicative près) est

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}.$$

Cas particuliers.

1°) Si A est diagonalisable: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$.

2°) Si A est « one by one step »: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s} = P(\lambda)$.

B) *Matrices commutant avec une matrice donnée A.* Soit $E' = \{ X \in E;\ AX = XA \}$ où E est l'espace vectoriel des matrices n, n sur le corps $\mathbf{C}$ $(A \in E')$. E' est un sous-espace vectoriel de E. Sa dimension dépend bien entendu du spécifique de A. On peut démontrer qu'elle est égale à la *somme des carrés de tous les sauts.*

$$\dim(E') = \sum_{\nu=1}^{s} \left[\sum_{q=1}^{p_\nu} (\delta_q^\nu)^2 \right]$$

Cas particuliers:

1°) A diagonalisable: $\dim(E') = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_s^2$.

2°) A « one by one step »: $\dim(E') = r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$.

C) *Série entière en A.* Il est facile de former la puissance $q$ième d'une transjordanienne, d'où la puissance $q$ième d'une matrice A. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q z^q$$

de rayon de convergence R. On considère la série de matrice A

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q A^q.$$

Elle est convergente de somme la matrice $f(A)$ à condition que $|\lambda_\nu| < R$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$. Passant par l'intermédiaire de la réduite transjordanienne T de A, on construit effectivement

$$f(T) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q T^q$$

au moyen des valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées pour $z = \lambda_1, \ldots, z = \lambda_s$. On a alors $f(A) = P \circ f(T) \circ P^{-1}$, P étant la matrice de passage ($A = P T P^{-1}$). On peut obtenir un théorème généralisant celui des polynômes minimums

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(z) \text{ admette } \lambda_\nu \text{ comme racine d'ordre } \geqslant p_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, s\,.$$

D) *Limite lorsque* $q \to \infty$ *de la direction* (Δ_q) *transformée par* f^q *de la direction donnée* (Δ_0). Soit $x \neq 0$, fixe, un vecteur directeur de (Δ_0); le vecteur $f^q(x)$ ou tout vecteur W_q colinéaire à ce dernier, est directeur de (Δ_q). Si $\lim_{q\to\infty} W_q = L$, la direction limite de (Δ_q) sera celle de vecteur directeur L.

On décompose $x = x^1 + x^2 + \ldots + x^s$; $x^\nu \in K^\nu = K^\nu_{p_\nu}$ et obtient

$$(1) \quad f^q(x^\nu) = \lambda_\nu^q x^\nu + C_q^1 \lambda_\nu^{q-1} g_\nu(x^\nu) + \ldots + C_q^{p_\nu - 1} \lambda_\nu^{q-p_\nu+1} g_\nu^{p_\nu-1}(x^\nu)\,.$$

On classe les valeurs propres par module décroissant:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_s|\,.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et $x^1 \neq 0$, on obtient le résultat connu: il y a une limite de (Δ_q) de vecteur directeur $L \in K_1^1$ que l'on détermine.
Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, l'étude se poursuit au moyen de (1) ...

E) *Résolution du système différentiel linéaire.*

$$(\Sigma) \quad \frac{dX}{dt} = A X$$

$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ = unicolonne de n fonctions inconnues de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, $A(n, n)$ connue. On transmue (Σ) en (S) par la matrice de passage P telle que $T = P^{-1} A P$, T réduite transjordanienne de A, en faisant le changement d'inconnue $X = P Y$:

$$(S) \quad \frac{dY}{dt} = T Y.$$

Ce système (S) se décompose en

$$\frac{dY^1}{dt} = T^1\, Y^1\,, \quad \frac{dY^2}{dt} = T^2\, Y^2\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{dY^s}{dt} = T^s\, Y^s\,,$$

T^ν étant le bloc transjordanien afférent à λ_ν.

Le système $\dfrac{dY^\nu}{dt} = T^\nu\, Y^\nu$ sera très simple, la dérivée d'une composante y_k étant simplement $\dfrac{dy_k}{dt} = \lambda_\nu\, y_k + \alpha\, y_{k+l}\,,\ \alpha = 0$ ou $1\,,\ 0 < l \leqslant r_\nu - k$ l'intégration de (S) est alors immédiate; on en déduit celle de (Σ).

1°) *Système* (Σ) *à solutions exponentielles pures ou à solutions algébrico-exponentielles* (x_k = somme de produits d'exponentielles par des constantes ou somme de produits d'exponentielles par des monômes dont l'un au moins a un degré $\geqslant 1$).

(Σ) à solutions exponentielles pures $\Leftrightarrow$ A diagonalisable

2°) *Systèmes* (Σ) *monoréductible*. C'est un système où la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre n par rapport à une composante, les autres composantes s'obtenant par dérivations de celle-là. On montre que

(Σ) monoréductible $\Leftrightarrow$ A « one by one step ».

(Reçu le 5 septembre 1976)

A. Fontaine
129, rue de l'Abbé-Groult
F-75015 — Paris