SISTEMI NORMALI DI GENERATORI PER GLI IDEALI DI Z [x]

Autor(en): **Franci, R. / Toti Rigatelli, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48923

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SISTEMI NORMALI DI GENERATORI PER GLI IDEALI DI $Z[x]$

di R. FRANCI e L. TOTI RIGATELLI [1])

PREMESSA

Se I e J sono due ideali principali di $Z[x]$ possiamo agevolmente confrontarli rispetto all'inclusione confrontando i loro generatori. Tuttavia se I e J non sono principali una ispezione diretta di due dati sistemi di generatori non ci permette in generale, di confrontare gli ideali stessi. In questa nota si da un teorema di riduzione a forma normale per sistemi di generatori di ideali di $Z[x]$, ossia si definiscono certi sistemi « normali » di generatori e si dimostra che ogni ideale ammette esattamente un sistema normale di generatori e si da un procedimento « effettivo » che permette di passare da un dato sistema finito di polinomi a un sistema normale per l'ideale da esso generato. Inoltre si dimostra che alcune delle questioni principali relative agli ideali hanno soluzione « effettiva » dati i loro sistemi normali.

1. SISTEMI NORMALI

Sia J un ideale di $Z[x]$. Per ogni numero naturale n indichiamo con J_n l'insieme costituito dai coefficienti direttivi dei polinomi di grado n di J e dallo zero.

Ovviamente:

LEMMA 1. *J_n è un ideale di Z.*

LEMMA 2. *La successione degli J_n è (debolmente) crescente.*

Poichè Z è euclideo e quindi noetheriano, la successione di cui al lemma 2 è stazionaria.

Poniamo $M = \{ n : J_{n-1} \subset J_n \}$ [2]) convenendo che $0 \in M$ se e solo se $J_0 \neq \{0\}$. M è ovviamente finito.

---

[1]) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni del C.N.R. Anno 1976.

[2]) Ora e nel seguito col simbolo $\subset$ intendiamo l'inclusione propria.

Indichiamo con a_n il generatore non negativo di J_n. La successione $(a_n)_{n\in\omega})$[1] si dice *segnatura* dell'ideale J. Ovviamente la segnatura di un ideale non ridotto a $\{ 0 \}$ può avere solo un segmento iniziale finito di zeri.

DEF. 1. Un polinomio di $Z[x]$ si dice *normale* se e solo se:

(i) il suo grado n è in M;

(ii) il suo coefficiente direttivo è a_n;

(iii) il suo coefficiente $i-$ esimo (per ogni $i < n$) è non negativo e minore di a_i: se $a_i \neq 0$.

LEMMA 3. *Per ogni* $n \in M$ *esiste esattamente un polinomio normale appartenente a* J *di grado* n.

Dim. Sia $n \in M$ ed a_n il generatore non negativo di J_n.

Allora esiste un polinomio in J di grado n e coefficiente direttivo a_n; sia esso $p(x) = a_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$. Consideriamo in J un polinomio del tipo $s(x) = a_{n-1} x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0$. Se $a_{n-1} \neq 0$, poichè b_{n-1}, $a_{n-1} \in Z$ esistono q_{n-1}, $r_{n-1} \in Z$ tali che $b_{n-1} = a_{n-1} q_{n-1} + r_{n-1}$ con $0 \leqslant r_{n-1} < a_{n-1}$. In $p(x) - s(x) q_{n-1} \in J$ il coefficiente del termine di grado n è a_n, quello di grado $n-1$ è r_{n-1}. Procedendo in modo analogo si costruisce un polinomio che verifica anche la (iii).

Supponiamo adesso che esistano due polinomi $q(x), p(x) \in J$ con $p(x) \neq q(x)$ e verificanti entrambi (i), (ii), (iii). Siano $p(x) = a_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$; $q(x) = a_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0$. $p(x) - q(x) \in J$. Sia i il massimo indice per cui $b_i - c_i \neq 0$, allora $b_i - c_i \in J_i$ e quindi $b_i - c_i = a_i a$ con $a \in Z$, contro la (iii). Da ciò segue $p(x) = q(x)$.

TEOREMA 1. *I polinomi normali costituiscono un sistema di generatori indipendenti per* J. [2])

Dim. Sia $p(x)$ un polinomio di J, facciamo vedere innanzitutto che $p(x)$ può essere espresso come combinazione lineare di polinomi normali. Lavoriamo per induzione sul grado di $p(x)$.

Passo zero: Sia $p(x)$ di grado zero. Salvo a confondere, come faremo sistematicamente, gli elementi di Z con i polinomi di grado zero, $p(x) \in J_0$. Da cui segue l'asserto.

---

[1]) Con ω indichiamo l'insieme dei naturali.

[1]) Ovviamente nel caso che stiamo esaminando questo risultato costituisce un raffinamento del teorema della base di Hilbert.

Passo induttivo: Supponiamo adesso che ogni polinomio in J di grado minore o uguale a $n - 1$ sia esprimibile come combinazione lineare di polinomi normali. Sia $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0 \in J$ di grado n. Distinguiamo due casi: $n \in M$. Consideriamo il polinomio normale di grado n; sia esso $q(x) = a_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_0$. Essendo $c_n \in J_n$ sarà per un opportuno $c \in Z$, $c_n = a_n c$. Il polinomio $p(x) - cq(x)$ è in J ed è al più di grado $n - 1$; quindi per l'ipotesi induttiva è esprimibile come combinazione lineare di polinomi normali.

$n \notin M$. Sia m il massimo grado dei polinomi normali di grado minore di n e $q(x)$ il polinomio normale di grado m. Il polinomio $q(x)\, x^{n-m}$ è in J ed è di grado n. Essendo per le ipotesi fatte $a_n = a_m$ e $c_n \in J_n$ sarà per un opportuno $c \in Z$, $c_n = a_m c$; $p(x) - c\, q(x)\, x^{n-m}$ è un polinomio di grado al più $n - 1$, quindi per l'ipotesi induttiva è combinazione lineare di polinomi normali. Resta da vedere che i polinomi normali costituiscono un sistema di generatori linearmente indipendenti. Questo risultato segue banalmente dall'osservazione che il coefficiente direttivo di ciascun polinomio normale è multiplo proprio del coefficiente direttivo del polinomio normale di grado immediatamente più alto.

Osserviamo che nei casi in cui la situazione è così semplice da suggerire un certo sistema di generatori come « naturale », questo è il sistema normale. Per esempio se J è un ideale principale, $J = (f)$ allora $\{f\}$ è il sistema normale per J. Ancora se $J \cap Z = (p)$ cioè $J = (p, f)$ con $f = x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + b_0$ con $0 \leqslant b_i < p$ allora $\{p, f\}$ è il sistema normale per J.

2. Segnature

Def. 2. Si dice *segnatura* ogni successione di naturali decrescente rispetto alla divisibilità da un certo indice in poi. Una segnatura si dice *normale* se è decrescente rispetto alla divisibilità.

Ovviamente una segnatura è una successione stazionaria.

Sia $\mathscr{S}$ l'insieme delle segnature. Se $a = (a_n)_{n \in \omega}$, $b = (b_n)_{n \in \omega}$ sono elementi di $\mathscr{S}$ poniamo $a < b$ se e solo se: (i) a_i divide b_i per ogni $i \in \omega$: (ii) l'indice di stazionarietà di a è minore o uguale a quello di b; (iii) a_i è divisore proprio di b_i per almeno un $i \in \omega$.

E' immediato verificare che $<$ è una relazione transitiva.

La segnatura di un ideale di $Z[x]$ è una segnatura normale. Viceversa ogni segnatura normale $a = (a_n)_{n \in \omega}$ è la segnatura di un opportuno ideale J_a di $Z[x]$, per esempio dell'ideale generato da $\{a_n\, x^n\}_{n \in \omega}$.

Se a e b sono due segnature normali tali che $a < b$ allora $J_a \supset J_b$. Se J_1, J_2 sono due ideali di $Z[x]$ con $J_1 \subset J_2$ allora la segnatura di J_2 è minore o uguale a quella di J_1.

LEMMA 4. *La relazione* $<$ *in* $\mathcal{S}$ *è fondata.* [1])

Dim. Supponiamo che ci sia una successione decrescente di segnature, sia essa $a^0 > a^1 > \ldots > a^k > \ldots$. Sia $(n_\kappa)_{\kappa \in \omega}$ la successione, ovviamente stazionaria, degli indici di stazionarietà; indichiamo con n il sua valore di stazionarietà. Consideriamo la successione $(a^\kappa_{n_\kappa})_{\kappa \in \omega}$; tale successione è decrescente rispetto alla divisibilità e quindi stazionaria; sia a il valore di stazionarietà. Dunque dall'indice n in poi ognuna delle successioni di partenza vale a, dovendo essere $a^0 > a^1 > \ldots > a^\kappa > \ldots$ ne consegue che esiste un indice j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ tale che la successione $(a^\kappa_j)_{\kappa \varepsilon \omega}$ decresce. Questo è assurdo, dunque $<$ è fondata.

DEF. 3. Sia $p_1, \ldots, p_n$ una sequenza di polinomi di $Z[x]$ di gradi rispettivamente $r_1, \ldots, r_n$, a due a due diversi, ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi. La sequenza (infinita)

$$0, \ldots, 0, p_1, xp_1, x^2 p_1, \ldots, x^{r_2 - r_1 - 1}\, p_1, p_2, xp_2, \ldots, x^{r_{n-1} - r_{n-2} - 1}\, p_{n-1}, p_n, xp_n, \ldots, x^\kappa p_n, \ldots .$$

si dice *prolungamento* della sequenza data.

La sequenza dei coefficienti direttivi di un prolungamento è una segnatura; che chiameremo appunto segnatura dal prolungamento e, per abuso di linguaggio, anche segnatura della sequenza di partenza.

La segnatura di un sistema normale di generatori per un ideale J di $Z[x]$ è una segnatura normale.

TEOREMA 2. *Sia* J *un ideale di* $Z[x]$, $p_1, \ldots, p_n$ *il suo sistema normale di generatori. Il prolungamento di detto sistema genera l'ideale come* Z-*modulo.*

Dim. Ovvia.

DEF. 4. Una sequenza finita di polinomi è detta *normale* se e solo se (i) la sua segnatura è normale e coincide con la segnatura dell'ideale da essa generato (ii) i coefficienti direttivi sono a due a due diversi.

---

[1]) Ricordiamo che una relazione binaria R si dice fondata se e solo se ogni sottoinsieme M non vuoto del suo campo ammette un elemento minimale, ciò che equivale alla inesistenza di successioni $(a_n)_{n \in \omega}$ con $a_{n+i}\, R a_n$ per ogni $n \in \omega$.

Dai teoremi 1 e 2 segue che ogni sistema normale di generatori è una sequenza normale

DEF. 5. Una sequenza finita di polinomi di $Z[x]$, ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi, è detta *ridotta* se e solo se:

(a) ogni polinomio ha coefficiente direttivo non negativo;

(b) i coefficienti direttivi decrescono secondo la divisibilità;

(c) ogni polinomio della sequenza ha i coefficienti non direttivi non negativi e strettamente minori del coefficiente direttivo (se è diverso da zero) del polinomio del prolungamento che ha lo stesso grado.

Dalle definizioni 1 e 5 si ha che: il sistema normale di generatori per un ideale è una sequenza ridotta. Non ogni sequenza ridotta è un sistema normale. Infatti la sequenza $30, 18+15x, 6+6x+5x^2$ è ridotta, ma $6 = 2(15x+18)-30x-30$ appartiene all'ideale J generato dai tre polinomi considerati, quindi la segnatura di J è strettamente minore della segnatura della sequenza considerata, per cui essa non è normale.

Osserviamo infine che esistono sequenze normali non ridotte. Infatti $s_1 = \{2, x^3+3\}$, $s_2 = \{2, x^3+1\}$ sono due sequenze normali che generano lo stesso ideale ma la prima di esse non è ridotta.

LEMMA 5. *Ogni sequenza di generatori per un ideale J di $Z[x]$ che sia normale e ridotta è un sistema normale di generatori per J.*

Dim. Ovvia.

LEMMA 6. *Sia J un ideale di $Z[x], p_1, ..., p_n$ una sequenza di generatori di gradi a due diversi ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi avente segnatura minimale (nell'insieme delle segnature dei sistemi di generatori per J) allora $p_1, ..., p_n$ è una sequenza normale.*

Dim. Indichiamo con $g_1, g_2, ..., g_n$ i gradi rispettivi di $p_1, p_2, ..., p_n$. Se la segnatura di $p_2, ..., p_n$ non è normale allora esistono almeno due polinomi, diciamo p_i, p_j tali che il coefficiente direttivo dell'uno non è multiplo del coefficiente direttivo dell'altro. Supponiamo $g_i < g_j$. Siano a, b, i coefficienti direttivi di p_i, p_j rispettivamente, $u = \alpha a + \beta b$ il M.C.D. di a e b. Il polinomio $p = \alpha x^{g_j - g_i} p_i + \beta p_j$ ha grado g_j. e coefficiente direttivo u. Per un opportuno $k \in Z$ si ha $b = ku$; il polinomio $q = p_j - kp$ ha grado t strettamente minore di g_j. La sequenza di polinomi ottenuta da quella iniziale sostituendo p al posto di p_j e aggiungendo q se t è diverso da ciascuno dei $g_1, ..., g_n$ e se invece $t = g_k$ ripetendo il processo a partire dalla coppia p_k, q genera J e ha ovviamente segnatura minore; questo è assurdo. Dunque $p_1, ..., p_n$ ha segnatura normale.

Resta da vedere che la segnatura di $p_1, ..., p_2$ eguaglia la segnatura dell'ideale. Non sia così. Allora esiste almeno un polinomio $p \in J$ che ha coefficiente direttivo non multiplo di alcun coefficiente direttivo di polinomi della sequenza iniziale. Allora $p_1, ..., p_n, p$ è un sistema di generatori per J da cui con lo stesso procedimento descritto sopra a partire dal polinomio p e da uno qualunque dei p_i si può ottenere un sistema di generatori di gradi a due distinti e con segnatura minore di quella di partenza, contro il fatto che questa è minimale.

Terminiamo questo paragrafo mettendo in evidenza un problema. Abbiamo già osservato che data una segnatura normale esiste almeno un ideale avente quella segnatura, sorge allora il problema di classificare gli ideali aventi una data segnatura normale. Per chiarire il problema esaminiamo un esempio. Sia data la segnatura normale: $a_0 = 30$, $a_1 = 15$, $a_n = 5$ per ogni $n \geqslant 2$. I possibili sistemi normali vanno ricercati nell'insieme delle sequenze ridotte:

$$\{ \{30, a + 15x, b + cx + 5x^2\} : 0 \leqslant a < 30,\ 0 \leqslant b < 30,\ 0 \leqslant c < 15 \}$$

Con facili calcoli si vede che le sequenze normali sono quelle per cui $a = 15$, $c = 10$ e b assume uno dei valori del seguente insieme $\{ 5, 10, 15, 20, 25 \}$. Dunque alla segnatura data corrispondono cinque ideali.

Osserviamo che in alcuni casi il problema si presenta di facile soluzione. Per esempio:

(α) Se la segnatura è costante cioè $a_n = a$ per ogni $n \in \omega$ allora c'è un unico sistema normale $\{ a \}$ e l'ideale corrispondente è dunque (a). In particolare se $a = 1$ l'ideale è $Z[x]$.

(β) Se la segnatura è del tipo $a_n = 1$ per ogni $n > 0$ allora i sistemi normali sono in numero di $a_0 - 1$ precisamente quelli del tipo $\{ a_0, x + b \}$ con $0 \leqslant b < a_0$.

(β_i) Se la segnatura è del tipo $a_n = a$ per ogni $n < m$ e $a_n = 1$ per ogni $n > m$ con m intero fissato, allora i sistemi normali sono del tipo $\{ a, x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_0 \}$ con $0 \leqslant b_i < a$.

(γ) Se la segnatura è del tipo $a_0 = 0$ e $a_n = a$ per ogni $n > 0$, i sistemi normali sono del tipo $\{ ax + b \}$ con b qualunque.

Si può ulteriormente osservare che le segnature minimali sono quelle del tipo $a_0 = p$ (p primo) $a_n = 1$ per ogni $n > 0$; ad esse dunque corrispondono ideali del tipo $(p, x + b)$ con $0 \leqslant b < p - 1$, che sono ovviamente massimali, viceversa ad ideali massimali non corrisponde necessariamente una segnatura minimale. Un ideale principale $J = (ax^m + bx^{m-1} + ...)$ ha segnatura del tipo $a_n = 0$ per ogni $n < m$, $a_n = a$ per ogni $n \geqslant m$ viceversa ad ogni segnatura di questo tipo corrispondono ideali principali.

3. Teorema Fondamentale

Def. 7. Data una sequenza di polinomi di $Z[x]$, chiamiamo *prolungamento multiplo* di tale sequenza l'insieme di infiniti polinomi ottenuti moltiplicando ciascuno dei polinomi dati per tutte le potenze intere non negative di x.

Il prolungamento multiplo di una sequenza di generatori di un ideale di $Z[x]$ genera l'ideale come Z-modulo.

Se $p_1, ..., p_n$ è una sequenza di polinomi di $Z[x]$ allora il suo prolungamento multiplo si può pensare come una matrice di n righe e ω colonne nel modo seguente:

$$0, ..., p_1, xp_1, x^2p_1, ..., x^\kappa p_1, ...$$
$$0, ..., 0, 0, ..., p_2, xp_2, x^2p_2, ...$$
$$0, ... 0, ..., p_n, xp_n, x^2p_n, ...$$

Ad ogni prolungamento multiplo resta ovviamente associato un insieme finito di segnature che chiameremo *multi segnatura*.

Nella dimostrazione del prossimo teorema ci servirà un semplice risultato di teoria degli insiemi, probabilmente noto, ma di cui non abbiamo trovato traccia nella letteratura consultata e che perciò riportiamo qui di seguito.

Dato un insieme S e una relazione binaria $<$ in S, definiamo una relazione binaria $<^*$, tra i sottoinsiemi finiti di S nel modo seguente: se A, B sono sottoinsiemi finiti di S, $A <^* B$ se e solo se esiste una applicazione suriettiva $f: B \to A$ tale che (i) $f(x) \leqslant x$ (per ogni $x \in B$) (ii) esiste almeno un $y \in B$ con $fy < y$.

Proposizione 1. *Se* $<$ *è fondata allora* $<^*$ *è fondata.*

Dim. Consideriamo una sequenza decrescente di elementi di S, sia essa $A_0 {}^*\!> A_1 {}^*\!> ... {}^*\!> A_n {}^*\!> ...$ Sia poi f_n una applicazione da A_n ad A_{n+1} con le proprietà suddette. Consideriamo le sequenze di elementi di S ottenute a partire dagli elementi di A_0 per successiva applicazione delle f_n.

Tali sequenze, ovviamente in numero finito, sono stazionarie per la fondatezza di $<$. Dunque anche la sequenza $(A_n)_{n \in \omega}$ è stazionaria.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema fondamentale.

Teorema 3. *Esiste procedimento effettivo che, dato un sistema finito di generatori per un ideale J di $Z[x]$, permette di trovare un sistema normale di generatori.*

Dim. Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$ generatori di J e $g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots \leqslant g_n$ i gradi rispettivi. Scriviamo la matrice corrispondente al prolungamento multiplo di tale sistema di generatori. Se il primo polinomio non nullo di una qualunque riga, diciamo l'i-esima, è multiplo secondo una costante del corrispondente polinomio di un'altra riga allora ai fini della generazione dell'ideale come Z-modulo, l'i-esima riga è inutile. Il sistema di generatori ottenuto cancellando l'i-esima riga ha multisegnatura [1]) minore di quello di partenza. Dopo aver eliminato tutte le righe inutili col procedimento sopra descritto, si può ulteriormente passare ad un sistema di generatori con multisegnatura minore nel modo sottodescritto. Consideriamo la i-esima e la j-esima riga, senza perdere di generalità si può supporre $i < j$. Partendo dai polinomi p_i, p_j, con lo stesso procedimento impiegato nella dimostrazione del lemma 6 si possono costruire due polinomi r ed s, con grado di r uguale al grado di p_j, coefficiente direttivo di r minore del coefficiente direttivo di p_j, grado di s strettamente minore del grado di p_j. Se al posto della j-esima riga sostituisco la riga seguente

$$0, \ldots, s, xs, x^2s, \ldots, r, xr, x^2r, \ldots$$

il multisistema che ottengo genera J ed ha multisegnatura strettamente minore di quella di partenza. Dalla fondatezza di $<^*$ iterando il procedimento sopradescritto si perviene, in numero finito di passi, ad un sistema di polinomi ridotto a una sola riga, che genera J ed ha segnatura minimale; cioè ad un sistema del tipo

$$0, \ldots, q_1, xq_1, \ldots, q_2, xq_2, \ldots, q_\kappa, xq_\kappa, \ldots$$

La sequenza $q_1, q_2, \ldots, q_\kappa$ genera ovviamente J ed ha segnatura minimale, dunque per il lemma 5 è una sequenza normale. Infine sottraendo da

[1]) Ricordiamo che una multisegnatura è un sistema finito di segnature. Quindi nell'insieme delle multisegnature si può considerare una relazione binaria $<^*$ come quella definita prima della prop. 1; ed è appunto a questa relazione che ci riferiamo quando diciamo che una multisegnatura è minore di un'altra.

ciascun q_i una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono si può passare ad un sistema

$$0, \ldots, \bar{q}_{j_1}, x\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}, x\bar{q}_{j_n}, \ldots$$

che genera J e in cui la sequenza $\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}$ è ridotta. Quindi $\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}$ è il sistema normale cercato.

COROLLARIO 1. Esiste un procedimento effettivo che dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori permette di confrontarli rispetto all'inclusione.

Dim. Siano $I = (p_1, \ldots, p_n)$, $J = (q_1, \ldots, q_r)$ gli ideali dati. Consideriamo l'ideale $K = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r)$. Dall'esame dei sistemi normali di generatori per I, J, K si arriva al confronto cercato.

COROLLARIO 2. Esiste un procedimento effettivo che, dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori, permette di trovare un sistema normale di generatori per l'ideale prodotto.

COROLLARIO 3. Esiste un procedimento effettivo che, dato un ideale di $Z[x]$ mediante un qualunque sistema di generatori mi permette di riconoscere se è primo, massimale.

Dim. Immediato dal teorema e dalla caratterizzazione [1]) degli ideali primi e massimali di $Z[x]$.

L'argomento del presente lavoro si presta a diverse generalizzazione di cui di occuperemo in seguito; alcune di esse sono ovvie e avremmo potuto darle subito, ma abbiamo preferito per chiarezza fare l'esposizione nel caso di $Z[x]$.

NOTA

Quando il presente lavoro era già stato inviato per la pubblicazione ci è giunta notizia che F. Châtelet in [1] e G. Fardoux in [2] [3] hanno studiato rispettivamente sistemi di generatori per ideali di $\mathbf{Z}[x]$ e $A[x]$ (con A anello a ideali pricipali).

Le basi canoniche individuate dagli autori sopra citati hanno stretti legami con i nostri sistemi normali di generatori, pur non coincidendo. Più

---

[1]) Ci riferiamo alla caratterizzazione data a pag. 233 di I. R. Shafarevich: « Basic algebraic geometry », Berlin 1974.

precisamente è facile vedere che se $\mathscr{B} = \{f_0, f_1, ..., f_n\}$ è una base canonica secondo Fardoux-Châtelet (ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi) allora $\mathscr{B}$ è una sequenza normale (cfr. def. 4 sopra) che genera l'ideale. D'altra parte una sequenza normale si può trasformare in una sequenza normale ridotta (cfr. def. 5 sopra) $\mathscr{B}' = \{f'_0, f'_1, ..., f'_n\}$ sottraendo da ogni polinomio una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono. $\mathscr{B}'$ così ottenuta genera lo stesso ideale di $\mathscr{B}$; inoltre $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ sono equivalenti nel senso di Fardoux. Possiamo dunque concludere che per ogni base canonica esiste una base canonica equivalente che è il sistema normale di generatori.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHÂTELET, F. *Colloque de Théorie des nombres d'Oberwohlfach*, 1964.

[2] FARDOUX, G. Bases réduites d'idéaux de $A[x]$, A, anneaux principal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *262* (1966), pp. 1146-1148.

[3] —— *Les idéaux des anneaux de polynômes à coefficients entiers et leurs applications.* (Tesi di dottorato, 1970.)

(Reçu le 25 janvier 1977)

Raffaella Franci
Laura Toti Rigatelli

Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze F.M.N.
Via del Capitano 15
I - 53100 — Siena

ERRATA

HOW TO USE RUNGE'S THEOREM

by L. A. Rubel

(*L'Enseignement Mathématique 22* (1976), pp. 185-190)

The author thanks Charles L. Belna for pointing out the following corrections to the solution to problem 2.

p. 186, line 4^-: $-\pi/10 \leqslant \theta \leqslant \pi/10$ should be $\pi/10 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \pi/10$

p. 186, line 1^-: $-\pi/20 < \theta < \pi/20$ should be $\pi/20 < \theta < 2\pi - \pi/20$

p. 187, line 3 and 6: $D_{n/20}$ should be $D_{1/20n}$

p. 187, line 10: $P_n(0)$ and $P_n(z)$ should be $|P_n(0)|$ and $|P_n(z)|$.

A final remark is that more care should be taken in the definition on page 186 of what is meant by L, "the level line of u that passes through 0" to avoid trivial examples like $u = Re(z^n)$ for large n. This would probably lead far afield - perhaps the solution best clarifies the problem.

(Reçu le 28 mars 1977)

L. A. Rubel

Department of mathematics
University of Illinois at Urbana-Champaign
Urbana, Illinois 61801

vide-leer-empty