# 2. Segnature

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

*Passo induttivo:* Supponiamo adesso che ogni polinomio in $J$ di grado minore o uguale a $n - 1$ sia esprimibile come combinazione lineare di polinomi normali. Sia $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0 \in J$ di grado $n$. Distinguiamo due casi: $n \in M$. Consideriamo il polinomio normale di grado $n$; sia esso $q(x) = a_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_0$. Essendo $c_n \in J_n$ sarà per un opportuno $c \in Z$, $c_n = a_n c$. Il polinomio $p(x) - cq(x)$ è in $J$ ed è al più di grado $n - 1$; quindi per l'ipotesi induttiva è esprimibile come combinazione lineare di polinomi normali.

$n \notin M$. Sia $m$ il massimo grado dei polinomi normali di grado minore di $n$ e $q(x)$ il polinomio normale di grado $m$. Il polinomio $q(x)\, x^{n-m}$ è in $J$ ed è di grado $n$. Essendo per le ipotesi fatte $a_n = a_m$ e $c_n \in J_n$ sarà per un opportuno $c \in Z$, $c_n = a_m c$ ; $p(x) - c\, q(x)\, x^{n-m}$ è un polinomio di grado al più $n - 1$, quindi per l'ipotesi induttiva è combinazione lineare di polinomi normali. Resta da vedere che i polinomi normali costituiscono un sistema di generatori linearmente indipendenti. Questo risultato segue banalmente dall'osservazione che il coefficiente direttivo di ciascun polinomio normale è multiplo proprio del coefficiente direttivo del polinomio normale di grado immediatamente più alto.

Osserviamo che nei casi in cui la situazione è così semplice da suggerire un certo sistema di generatori come « naturale », questo è il sistema normale. Per esempio se $J$ è un ideale principale, $J = (f)$ allora $\{f\}$ è il sistema normale per $J$. Ancora se $J \cap Z = (p)$ cioè $J = (p, f)$ con $f = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$ con $0 \leqslant b_i < p$ allora $\{p, f\}$ è il sistema normale per $J$.

## 2. Segnature

Def. 2. Si dice *segnatura* ogni successione di naturali decrescente rispetto alla divisibilità da un certo indice in poi. Una segnatura si dice *normale* se è decrescente rispetto alla divisibilità.

Ovviamente una segnatura è una successione stazionaria.

Sia $\mathscr{S}$ l'insieme delle segnature. Se $a = (a_n)_{n \in \omega}$, $b = (b_n)_{n \in \omega}$ sono elementi di $\mathscr{S}$ poniamo $a < b$ se e solo se: (i) $a_i$ divide $b_i$ per ogni $i \in \omega$: (ii) l'indice di stazionarietà di a è minore o uguale a quello di $b$; (iii) $a_i$ è divisore proprio di $b_i$ per almeno un $i \in \omega$.

*E'* immediato verificare che $<$ è una relazione transitiva.

La segnatura di un ideale di $Z[x]$ è una segnatura normale. Viceversa ogni segnatura normale $a = (a_n)_{n \in \omega}$ è la segnatura di un opportuno ideale $J_a$ di $Z[x]$, per esempio dell'ideale generato da $\{a_n x^n\}_{n \in \omega}$.

Se $a$ e $b$ sono due segnature normali tali che $a < b$ allora $J_a \supset J_b$. Se $J_1, J_2$ sono due ideali di $Z[x]$ con $J_1 \subset J_2$ allora la segnatura di $J_2$ è minore o uguale a quella di $J_1$.

LEMMA 4. *La relazione* $<$ *in* $\mathcal{S}$ *è fondata.* [1])

*Dim.* Supponiamo che ci sia una successione decrescente di segnature, sia essa $a^0 > a^1 > \dots > a^k > \dots$. Sia $(n_\kappa)_{\kappa\in\omega}$ la successione, ovviamente stazionaria, degli indici di stazionarietà; indichiamo con $n$ il sua valore di stazionarietà. Consideriamo la successione $(a^\kappa_{n_\kappa})_{\kappa\in\omega}$; tale successione è decrescente rispetto alla divisibilità e quindi stazionaria; sia $a$ il valore di stazionarietà. Dunque dall'indice $n$ in poi ognuna delle successioni di partenza vale $a$, dovendo essere $a^0 > a^1 > \dots > a^\kappa > \dots$ ne consegue che esiste un indice $j$, $0 \leqslant j \leqslant n - 1$ tale che la successione $(a^\kappa_j)_{\kappa\varepsilon\omega}$ decresce. Questo è assurdo, dunque $<$ è fondata.

DEF. 3. Sia $p_1, \dots, p_n$ una sequenza di polinomi di $Z[x]$ di gradi rispettivamente $r_1, \dots, r_n$, a due a due diversi, ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi. La sequenza (infinita)

$$0, \dots, 0, p_1, xp_1, x^2p_1, \dots, x^{r_2-r_1-1}\, p_1, p_2, xp_2, \dots, x^{r_{n-1}-r_{n-2}-1}\, p_{n-1}, p_n, xp_n, \dots, x^\kappa p_n, \dots .$$

si dice *prolungamento* della sequenza data.

La sequenza dei coefficienti direttivi di un prolungamento è una segnatura; che chiameremo appunto segnatura dal prolungamento e, per abuso di linguaggio, anche segnatura della sequenza di partenza.

La segnatura di un sistema normale di generatori per un ideale $J$ di $Z[x]$ è una segnatura normale.

TEOREMA 2. *Sia $J$ un ideale di $Z[x]$, $p_1, \dots, p_n$ il suo sistema normale di generatori. Il prolungamento di detto sistema genera l'ideale come $Z$-modulo.*

*Dim.* Ovvia.

DEF. 4. Una sequenza finita di polinomi è detta *normale* se e solo se (i) la sua segnatura è normale e coincide con la segnatura dell'ideale da essa generato (ii) i coefficienti direttivi sono a due a due diversi.

---

[1]) Ricordiamo che una relazione binaria $R$ si dice fondata se e solo se ogni sottoinsieme $M$ non vuoto del suo campo ammette un elemento minimale, ciò che equivale alla inesistenza di successioni $(a_n)_{n\in\omega}$ con $a_{n+i}\; Ra_n$ per ogni $n \in \omega$.

Dai teoremi 1 e 2 segue che ogni sistema normale di generatori è una sequenza normale

DEF. 5. Una sequenza finita di polinomi di $Z[x]$, ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi, è detta *ridotta* se e solo se:

(a) ogni polinomio ha coefficiente direttivo non negativo;

(b) i coefficienti direttivi decrescono secondo la divisibilità;

(c) ogni polinomio della sequenza ha i coefficienti non direttivi non negativi e strettamente minori del coefficiente direttivo (se è diverso da zero) del polinomio del prolungamento che ha lo stesso grado.

Dalle definizioni 1 e 5 si ha che: il sistema normale di generatori per un ideale è una sequenza ridotta. Non ogni sequenza ridotta è un sistema normale. Infatti la sequenza $30, 18+15x, 6+6x+5x^2$ è ridotta, ma $6 = 2(15x+18)-30x-30$ appartiene all'ideale $J$ generato dai tre polinomi considerati, quindi la segnatura di $J$ è strettamente minore della segnatura della sequenza considerata, per cui essa non è normale.

Osserviamo infine che esistono sequenze normali non ridotte. Infatti $s_1 = \{2, x^3+3\}$, $s_2 = \{2, x^3+1\}$ sono due sequenze normali che generano lo stesso ideale ma la prima di esse non è ridotta.

LEMMA 5. *Ogni sequenza di generatori per un ideale $J$ di $Z[x]$ che sia normale e ridotta è un sistema normale di generatori per $J$.*

*Dim.* Ovvia.

LEMMA 6. *Sia $J$ un ideale di $Z[x], p_1, \ldots, p_n$ una sequenza di generatori di gradi a due diversi ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi avente segnatura minimale (nell'insieme delle segnature dei sistemi di generatori per $J$) allora $p_1, \ldots, p_n$ è una sequenza normale.*

*Dim.* Indichiamo con $g_1, g_2, \ldots, g_n$ i gradi rispettivi di $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Se la segnatura di $p_2, \ldots, p_n$ non è normale allora esistono almeno due polinomi, diciamo $p_i, p_j$ tali che il coefficiente direttivo dell'uno non è multiplo del coefficiente direttivo dell'altro. Supponiamo $g_i < g_j$. Siano $a$, $b$, i coefficienti direttivi di $p_i, p_j$ rispettivamente, $u = \alpha a + \beta b$ il M.C.D. di $a$ e $b$. Il polinomio $p = \alpha x^{g_j - g_i} p_i + \beta p_j$ ha grado $g_j$. e coefficiente direttivo $u$. Per un opportuno $k \in Z$ si ha $b = ku$; il polinomio $q = p_j - kp$ ha grado $t$ strettamente minore di $g_j$. La sequenza di polinomi ottenuta da quella iniziale sostituendo $p$ al posto di $p_j$ e aggiungendo $q$ se $t$ è diverso da ciascuno dei $g_1, \ldots, g_n$ e se invece $t = g_k$ ripetendo il processo a partire dalla coppia $p_k$, $q$ genera $J$ e ha ovviamente segnatura minore; questo è assurdo. Dunque $p_1, ..., p_n$ ha segnatura normale.

Resta da vedere che la segnatura di $p_1, ..., p_2$ eguaglia la segnatura dell'ideale. Non sia così. Allora esiste almeno un polinomio $p \in J$ che ha coefficiente direttivo non multiplo di alcun coefficiente direttivo di polinomi della sequenza iniziale. Allora $p_1, ..., p_n, p$ è un sistema di generatori per $J$ da cui con lo stesso procedimento descritto sopra a partire dal polinomio $p$ e da uno qualunque dei $p_i$ si può ottenere un sistema di generatori di gradi a due distinti e con segnatura minore di quella di partenza, contro il fatto che questa è minimale.

Terminiamo questo paragrafo mettendo in evidenza un problema. Abbiamo già osservato che data una segnatura normale esiste almeno un ideale avente quella segnatura, sorge allora il problema di classificare gli ideali aventi una data segnatura normale. Per chiarire il problema esaminiamo un esempio. Sia data la segnatura normale: $a_0 = 30$, $a_1 = 15$, $a_n = 5$ per ogni $n \geqslant 2$. I possibili sistemi normali vanno ricercati nell'insieme delle sequenze ridotte:

$$\{ \{30, a + 15x, b + cx + 5x^2\} : 0 \leqslant a < 30,\ 0 \leqslant b < 30,\ 0 \leqslant c < 15 \}$$

Con facili calcoli si vede che le sequenze normali sono quelle per cui $a = 15$, $c = 10$ e $b$ assume uno dei valori del seguente insieme $\{ 5, 10, 15, 20, 25 \}$. Dunque alla segnatura data corrispondono cinque ideali.

Osserviamo che in alcuni casi il problema si presenta di facile soluzione. Per esempio:

($\alpha$) Se la segnatura è costante cioè $a_n = a$ per ogni $n \in \omega$ allora c'è un unico sistema normale $\{ a \}$ e l'ideale corrispondente è dunque $(a)$. In particolare se $a = 1$ l'ideale è $Z[x]$.

($\beta$) Se la segnatura è del tipo $a_n = 1$ per ogni $n > 0$ allora i sistemi normali sono in numero di $a_0 - 1$ precisamente quelli del tipo $\{ a_0, x + b \}$ con $0 \leqslant b < a_0$.

($\beta_i$) Se la segnatura è del tipo $a_n = a$ per ogni $n < m$ e $a_n = 1$ per ogni $n > m$ con $m$ intero fissato, allora i sistemi normali sono del tipo $\{ a, x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_0 \}$ con $0 \leqslant b_i < a$.

($\gamma$) Se la segnatura è del tipo $a_0 = 0$ e $a_n = a$ per ogni $n > 0$, i sistemi normali sono del tipo $\{ ax + b \}$ con $b$ qualunque.

Si può ulteriormente osservare che le segnature minimali sono quelle del tipo $a_0 = p$ ($p$ primo) $a_n = 1$ per ogni $n > 0$; ad esse dunque corrispondono ideali del tipo $(p, x + b)$ con $0 \leqslant b < p - 1$, che sono ovviamente massimali, viceversa ad ideali massimali non corrisponde necessariamente una segnatura minimale. Un ideale principale $J = (ax^m + bx^{m-1} + ...)$ ha segnatura del tipo $a_n = 0$ per ogni $n < m$, $a_n = a$ per ogni $n \geqslant m$ viceversa ad ogni segnatura di questo tipo corrispondono ideali principali.

## 3. Teorema Fondamentale

Def. 7. Data una sequenza di polinomi di $Z[x]$, chiamiamo *prolungamento multiplo* di tale sequenza l'insieme di infiniti polinomi ottenuti moltiplicando ciascuno dei polinomi dati per tutte le potenze intere non negative di $x$.

Il prolungamento multiplo di una sequenza di generatori di un ideale di $Z[x]$ genera l'ideale come $Z$-modulo.

Se $p_1, ..., p_n$ è una sequenza di polinomi di $Z[x]$ allora il suo prolungamento multiplo si può pensare come una matrice di $n$ righe e $\omega$ colonne nel modo seguente:

$$0, ..., p_1, xp_1, x^2p_1, ..., x^\kappa p_1, ...$$
$$0, ..., 0, 0, ..., p_2, xp_2, x^2p_2, ...$$
$$0, ... 0, ..., p_n, xp_n, x^2p_n, ...$$

Ad ogni prolungamento multiplo resta ovviamente associato un insieme finito di segnature che chiameremo *multi segnatura*.

Nella dimostrazione del prossimo teorema ci servirà un semplice risultato di teoria degli insiemi, probabilmente noto, ma di cui non abbiamo trovato traccia nella letteratura consultata e che perciò riportiamo qui di seguito.

Dato un insieme $S$ e una relazione binaria $<$ in $S$, definiamo una relazione binaria $<^*$, tra i sottoinsiemi finiti di $S$ nel modo seguente: se $A$, $B$ sono sottoinsiemi finiti di $S$, $A <^* B$ se e solo se esiste una applicazione suriettiva $f: B \to A$ tale che (i) $f(x) \leqslant x$ (per ogni $x \in B$) (ii) esiste almeno un $y \in B$ con $fy < y$.

Proposizione 1. *Se $<$ è fondata allora $<^*$ è fondata.*

*Dim.* Consideriamo una sequenza decrescente di elementi di $S$, sia essa $A_0 {}^*\!> A_1 {}^*\!> ... {}^*\!> A_n {}^*\!> ...$ Sia poi $f_n$ una applicazione da $A_n$ ad $A_{n+1}$ con le proprietà suddette. Consideriamo le sequenze di elementi di $S$ ottenute a partire dagli elementi di $A_0$ per successiva applicazione delle $f_n$.