

# 0. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# REPRESENTATION OF COMPLETELY CONVEX FUNCTIONS BY THE EXTREME-POINT METHOD

by CHRISTIAN BERG

## 0. INTRODUCTION

A function  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbf{R}$  is called completely convex, if it is  $C^\infty$  and  $(-1)^k f^{(2k)} \geq 0$  for all  $k \geq 0$ . A completely convex function  $f$  is called minimal if  $f(x) - a \sin(\pi x)$  is not completely convex for any number  $a > 0$ . Widder showed (cf. [5]) that a completely convex function can be extended to an entire holomorphic function, and in the paper [6] he proved that a minimal completely convex function can be expanded in a Lidstone series. This indicates that the Lidstone polynomials lie on the extreme rays of the cone  $W$  of completely convex functions.

The purpose of the present paper is to treat the completely convex functions by the extreme-point method and to obtain the expansion in Lidstone series as a special case of the Choquet representation theorem.

We will proceed as follows: In the topology of point-wise convergence the set  $W$  of completely convex functions is a closed, metrizable convex cone. We prove directly that the extreme rays of  $W$  are generated by certain polynomials — essentially the Lidstone polynomials — and the function  $\sin(\pi x)$ . The occurrence of the extreme ray generated by  $\sin(\pi x)$  is related to the fact that only minimal completely convex functions can be expanded in Lidstone series.

The cone  $W$  has a compact convex base  $B$ , and the extreme points of  $B$  are determined. It turns out that  $B$  is a Bauer simplex, i.e.  $B$  is a simplex and the extreme points form a closed set.

The author wants to acknowledge Widder's paper [6] as a source of inspiration. The reason for writing this paper is that we felt it natural to investigate the cone  $W$  by the extreme-point method.

Recently Mugler [2] showed that real part of the holomorphic extension of  $f \in W$  to the strip  $\operatorname{Re} z \in ]0, 1[$  is completely convex on each segment  $\{x + iy \mid 0 < x < 1\}$ . We give a very short proof of this result.