KRITISCHE PUNKTE UND KRÜMMUNG FÜR DIE MENGEN DES KONVEXRINGES

von Rolf SCHNEIDER

Bei glatten Hyperflächen im euklidischen Raum E^n besteht bekanntlich ein enger Zusammenhang zwischen der Gaußschen Krümmung und den Morse-Indizes kritischer Punkte von Höhenfunktionen. Hierdurch ergibt sich insbesondere der Satz von Gauß-Bonnet als einfaches Korollar eines Satzes über Indexsummen (siehe z.B. Kuiper [7]). Eine analoge, aber ganz elementare Theorie für Zellkomplexe im E^n ist von Banchoff [3] (siehe auch [4]) dargestellt worden. Für beliebige kompakte euklidische Polyeder hat Hadwiger [6] nach Erklärung einer geeigneten Eckenkrümmung ein Analogon zur Gauß-Bonnet-Formel gefunden. Ziel dieser Note ist eine Ausdehnung dieser elementaren Begriffsbildungen und Ergebnisse auf die Mengen des Konvexringes. Der kombinatorische Kern der Zusammenhänge tritt dabei noch deutlicher zutage.

Unter dem Konvexring $\mathfrak{K}^n$ versteht man das System aller Teilmengen des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n, die sich als Vereinigung von endlich vielen konvexen Körpern (nichtleeren, kompakten, konvexen Mengen) darstellen lassen. Auch die leere Menge $\emptyset$ wird zu $\mathfrak{K}^n$ gerechnet. $\mathfrak{K}^n$ ist abgeschlossen gegenüber der Bildung endlicher Vereinigungen und Durchschnitte. Auf $\mathfrak{K}^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Funktion χ mit $\chi(\emptyset) = 0$ und $\chi(K) = 1$ für jeden konvexen Körper K, die additiv ist, also

$$(1) \quad \chi(K_1 \cup K_2) + \chi(K_1 \cap K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2) \text{ für } K_1, K_2 \in \mathfrak{K}^n$$

erfüllt. Dies ist die *Eulersche Charakteristik*, deren Existenz nach Hadwiger [5] in elementarer Weise nachgewiesen werden kann. Die Eindeutigkeit ergibt sich sofort mit der aus (1) folgenden Formel

$$\chi(K) = \Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1} \chi(K_v) \text{ für } K = \cup_{j=1}^{r} K_j ,$$

von der wir des öfteren Gebrauch machen werden. Hier durchläuft v das System $S(r)$ der nichtleeren Teilmengen von $\{1, ..., r\}$, $|v|$ ist die Elementzahl von v, und für $v = \{i_1, ..., i_k\} \in S(r)$ ist

$$K_v = K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_k}$$

gesetzt.

Wir bezeichnen mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt des E^n und mit $S^{n-1} = \{x \in E^n \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ die Einheitssphäre. Für einen konvexen Körper $K \subset E^n$ und für $\xi \in S^{n-1}$ sei $H(K, \xi)$ die Stützebene an K mit äußerem Normalenvektor ξ. Ferner sei für $p \in E^n$, $\xi \in S^{n-1}$ und reelles ε

$$H_\varepsilon(p, \xi) = \{x \in E^n \mid \langle x, \xi\rangle = \langle p, \xi\rangle + \varepsilon\}$$

gesetzt. Mit $B_{p,\rho}$ wird die abgeschlossene Vollkugel mit Mittelpunkt p und Radius ρ bezeichnet.

Zunächst setzen wir nun für $p \in E^n$, $\xi \in S^{n-1}$ und konvexe Körper $K \subset E^n$

$$i(K, p, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p \in H(K, \xi) \cap K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $K \in \mathfrak{K}^n$, dargestellt in der Form $K = \cup_{j=1}^r K_j$ mit konvexen Körpern K_j, möchten wir dann

$$i(K, p, \xi) = \sum_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, i(K_v, p, \xi) \tag{2}$$

definieren. Hierzu ist zu zeigen, daß die rechte Seite nur von K und nicht von der speziellen Darstellung von K als Vereinigung konvexer Körper abhängt. Im Fall $p \notin K$ ist das richtig, da die rechte Seite gleich Null ist. Sei also $p \in K$. O.B.d.A. gelte $p \in K_j$ genau für $j = 1, \ldots, m$. Wir können $\rho > 0$ so klein wählen daß $K_j \cap B_{p,\rho} = \varnothing$ für $j \notin \{1, \ldots, m\}$ gilt. Sodann können wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß $H_\varepsilon(p, \xi) \cap K_v \cap B_{p,\rho} \neq \varnothing$ für alle $v \in S(m)$ mit $i(K_v, p, \xi) = 0$ gilt. Dann ist also für $v \in S(m)$

$$i(K_v, p, \xi) = 1 - \chi\big(H_\varepsilon(p, \xi) \cap K_v \cap B_{p,\rho}\big).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &\Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, i(K_v, p, \xi) = \Sigma_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1}\, i(K_v, p, \xi) \\ &= \Sigma_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \left[1 - \chi\big(H_\varepsilon(p, \xi) \cap K_v \cap B_{p,\rho}\big)\right] \\ &= 1 - \chi\big(H_\varepsilon(p, \xi) \cap K \cap B_{p,\rho}\big). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, i(K_v, p, \xi) = 1 - \lim_{\rho \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \chi\big(H_\varepsilon(p, \xi) \cap K \cap B_{p,\rho}\big),$$

was nur noch von K abhängt. Wir können also in der Tat $i(K, p, \xi)$ durch (2) definieren. Zugleich haben wir damit die Darstellung

$$(3)\quad i(K,p,\xi)=\begin{cases}0, \text{ wenn } p\notin K,\\ 1-\lim\limits_{\rho\to 0+}\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\chi\big(H_\varepsilon(p,\xi)\cap K\cap B_{p,\rho}\big), \text{ wenn } p\in K,\end{cases}$$

gewonnen. Wir setzen noch $i(\varnothing, p, \xi) = 0$.

Die ganze Zahl $i(K, p, \xi)$ nennen wir den *Index von K in p bezüglich ξ*. Bei festen p und ξ ist $i(\cdot, p, \xi)$ gemäß (2) ein additives Funktional auf dem Konvexring $\mathfrak{K}^n$. Ist $i(K, p, \xi) \neq 0$, so wollen wir p als *kritischen Punkt von K bezüglich ξ* bezeichnen. Aus (3) geht hervor, daß höchstens Randpunkte von K kritisch sein können.

Wir wollen nun zeigen, daß die Summe der Indizes aller kritischen Punkte von K bezüglich ξ gleich der Eulerschen Charakteristik von K ist. Wie im Fall glatter Flächen müssen wir uns dazu auf Richtungen ξ beschränken, für die alle kritischen Punkte „nichtdegeneriert" sind. Der Vektor ξ heiße *regulär für $K \in \mathfrak{K}^n$*, wenn es eine Darstellung $K = \cup_{j=1}^r K_j$ mit konvexen K_j gibt, so daß $H(K_v, \xi) \cap K_v$ für jedes $v \in S(r)$ höchstens einen Punkt enthält. Da bei gegebener Darstellung nur endlich viele konvexe Körper K_v vorkommen, ist die Menge der Vektoren ξ, die für gegebenes $K \in \mathfrak{K}^n$ nicht regulär sind, auf S^{n-1} vom Maß Null. Die nichtregulären Stützrichtungen eines konvexen Körpers machen nämlich nur eine Nullmenge aus (für $n = 3$ siehe A. D. Aleksandrov [1], Kap. V, § 2; der Beweis läßt sich auf höhere Dimensionen ausdehnen; man kann dieses Ergebnis aber auch durch Anwendung einer bekannten Aussage über singuläre Randpunkte (siehe z.B. Anderson-Klee [2]) auf den polaren Körper erhalten).

SATZ 1. *Ist $K \in \mathfrak{K}^n$ und ist $\xi \in S^{n-1}$ regulär für K, so gilt*

$$\Sigma_{p\in K}\, i(K,p,\xi) = \chi(K).$$

Beweis. Für $K = \varnothing$ ist die Gleichung erfüllt. Für $\varnothing \neq K \in \mathfrak{K}^n$ sei $K = \cup_{j=1}^r K_j$ eine Darstellung mit konvexen K_j derart, daß $H(K_v, \xi) \cap K_v$ stets höchstens einen Punkt enthält. Es gilt

$$(4)\qquad \Sigma_{p\in K}\, i(K,p,\xi) = \Sigma_{v\in S(r)}(-1)^{|v|-1}\,\Sigma_{p\in K}\, i(K_v,p,\xi).$$

Ist $K_v \neq \varnothing$, so gibt es genau einen Punkt $p \in K$ mit $i(K_v, p, \xi) = 1$, also ist

$$\Sigma_{p\in K}\, i(K_v,p,\xi) = \chi(K_v).$$

Die rechte Seite in (4) ist also gleich $\chi(K)$, was zu beweisen war.

Eine besondere Formel für den Index hat man zur Verfügung im Falle eines Polyeders, also einer Vereinigung von endlich vielen konvexen Polytopen. Jedes Polyeder läßt sich (auf mannigfache Art) als Träger $|\mathscr{P}|$ eines Zellkomplexes $\mathscr{P}$ darstellen. Unter einem *Zellkomplex* im E^n versteht man dabei eine Menge $\mathscr{P}$ von endlich vielen konvexen Polytopen des E^n, den *Zellen* von $\mathscr{P}$, mit der Eigenschaft, daß mit jeder Zelle auch alle ihre Seiten zu $\mathscr{P}$ gehören und daß der Durchschnitt von je zwei Zellen entweder leer oder eine gemeinsame Seite beider Zellen ist. Der Träger $|\mathscr{P}|$ des Komplexes $\mathscr{P}$ ist die Vereinigung all seiner Zellen, also ein Element des Konvexringes $\mathfrak{R}^n$. Mit $\Delta^k(\mathscr{P})$ bezeichnen wir die Menge aller k-dimensionalen Zellen von $\mathscr{P}$. Ist nun $\mathscr{P}$ ein Zellkomplex, so gilt für den Index von $|\mathscr{P}|$ in einem Punkt $p \in E^n$ bezüglich der Richtung $\xi \in S^{n-1}$ die Gleichung

$$(5) \qquad i(|\mathscr{P}|, p, \xi) = \Sigma_{k=0}^{n}(-1)^k \, \Sigma_{Z \in \Delta^k(\mathscr{P})} \, i(Z, p, -\xi),$$

vorausgesetzt, daß für je zwei verschiedene Ecken (0-dimensionale Zellen) x, y von $\mathscr{P}$ stets $\langle x, \xi\rangle \neq \langle y, \xi\rangle$ ist (ξ soll dann *regulär für* $\mathscr{P}$ heißen). Die anschauliche Deutung der inneren Summe ist unmittelbar ersichtlich: dies ist die Anzahl der k-dimensionalen Zellen von $\mathscr{P}$, für die p die „tiefste" Ecke bezüglich der durch ξ bestimmten Höhenfunktion ist.

Mit der Gleichung (5) ist der Anschluß an Banchoff's [3] Indexdefinition gewonnen. Insbesondere hat sich gezeigt, daß die von Banchoff für einen Zellkomplex $\mathscr{P}$ definierte Indexfunktion nur vom Träger $|\mathscr{P}|$ und nicht von dessen spezieller Zellzerlegung abhängt.

Die Gleichung (5) ist für den Fall, daß $\mathscr{P}$ der Randkomplex eines konvexen Polytops ist, von Shephard [11], (13), bewiesen worden. Unter Verwendung der Additivität des Index erhält man daraus den allgemeinen Fall nach einer Methode von Perles-Sallee [10], S. 238-239.

Wir erklären nun für die Mengen des Konvexringes ein Krümmungsmaß. Ist zunächst $K \in \mathfrak{R}^n$ ein konvexer Körper und $B \subset E^n$ eine Borelmenge, so bezeichne $\sigma(K, B)$ das sphärische Bild von $\partial K \cap B$, also die Menge aller Vektoren $\xi \in S^{n-1}$, die als äußere Normalenvektoren an K in einem Punkt aus B auftreten. Dann ist $\sigma(K, B)$ eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von S^{n-1}, und wenn ihr Lebesguesches Maß mit $\kappa(K, B)$ bezeichnet wird, so ist damit ein Maß $\kappa(K, \cdot)$ auf der σ-Algebra der Borelmengen des E^n erklärt. Die Beweise für diese Behauptungen findet man für den Fall $n = 3$ bei Aleksandrov [1], Kap. V, § 2; die Übertragung auf höhere Dimensionen bereitet keine Schwierigkeiten. Wir bezeichnen $\kappa(K, \cdot)$ als das (Gaußsche) Krümmungsmaß von K. Unter Verwendung des Index läßt es sich darstellen durch

$$\kappa(K, B) = \int_{S^{n-1}} \Sigma_{p \in B} \, i(K, p, \xi) \, d\,\omega(\xi),$$

wo ω das Lebesguesche Maß auf der Sphäre S^{n-1} bezeichnet. Der Integrand stimmt nämlich außerhalb einer Nullmenge $N(K)$ (der Menge der $\xi \in S^{n-1}$, die für K nicht regulär sind) überein mit der charakteristischen Funktion der Menge $\sigma(K, B)$.

Ist nun $K \in \mathfrak{K}^n$ eine nichtleere Menge des Konvexringes mit der Darstellung $K = \cup_{j=1}^{r} K_j$ mit konvexen Körpern K_j, so gilt für jede Borelmenge $B \subset E^n$ und für $\xi \in S^{n-1} \setminus \cup_{v \in S(r)} N(K_v)$

$$\begin{aligned}\Sigma_{p \in B}\, i(K, p, \xi) &= \Sigma_{p \in B}\, \Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, i(K_v, p, \xi) \\ &= \Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, \Sigma_{p \in B}\, i(K_v, p, \xi)\,.\end{aligned}$$

Wir können also

$$\kappa(K, B) = \int_{S^{n-1}} \Sigma_{p \in B}\, i(K, p, \xi)\, d\,\omega(\xi) \tag{6}$$

(und $\kappa(\emptyset, B) = 0$) definieren, denn die Funktion $\xi \mapsto \Sigma_{p \in B}\, i(K, p, \xi)$ ist auf S^{n-1} integrierbar; und es ergibt sich sogleich die Darstellung

$$\kappa(K, B) = \Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, \kappa(K_v, B)\,. \tag{7}$$

Wir bezeichnen das signierte Borelmaß $\kappa(K, \cdot)$ als das *Krümmungsmaß* von K. Der an sich naheliegende Versuch, die Gleichung (7) als Definition für $\kappa(K, B)$ zu benutzen, begegnet der Schwierigkeit, die Unabhängigkeit von der speziellen Darstellung von K als Vereinigung konvexer Körper nachweisen zu müssen. Hier erweist sich also die Verwendung des Index und die damit mögliche Definition (6) als vorteilhaft. Wie man an (7) abliest, ist bei festem B durch $\kappa(\cdot, B)$ ein additives Funktional auf dem Konvexring $\mathfrak{K}^n$ gegeben. In dieser Additivität dürfte im Hinblick auf weitere Anwendungen des Krümmungsmaßes ein Vorteil zu sehen sein. Eine unterschiedliche, von Matheron [9], S. 119-122, vorgeschlagene Fortsetzung des Krümmungsmaßes von der Menge der konvexen Körper auf den Konvexring besitzt diese Additivitätseigenschaft nicht. Aus der Additivität des Krümmungsmaßes resultiert das folgende elementare Analogon des Gauß-Bonnetschen Satzes.

SATZ 2. *Für* $K \in \mathfrak{K}^n$ *gilt*

$$\kappa(K, E^n) = \omega(S^{n-1})\, \chi(K)\,.$$

Beweis. Für $K = \emptyset$ ist das klar. Sei $K = \cup_{j=1}^{r} K_j$ mit konvexen Körpern K_j. Dann folgt aus (7)

$$\begin{aligned}\kappa(K, E^n) &= \Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, \kappa(K_v, E^n) \\ &= \Sigma_{v \in S(r)} (-1)^{|v|-1}\, \omega(S^{n-1})\, \chi(K_v) = \omega(S^{n-1})\, \chi(K)\,.\end{aligned}$$

Ist speziell K ein Polyeder, so ergibt sich ein Resultat von Banchoff [3] (Theorem 2). Ferner verallgemeinert Satz 2 ein von Hadwiger [6] angegebenes, eine unterschiedliche Krümmungsdefinition verwendendes Analogon der Gauß-Bonnet-Formel für Polyeder. Um dies einzusehehn, beachte man, daß für ein Polyeder $K \in \mathfrak{R}^n$ der von Hadwiger erklärte Polarwinkel $\alpha(K; p)$ übereinstimmt mit $\kappa(K, \{p\})$; die Gleichheit ergibt sich aus der offensichtlichen Übereinstimmung auf der Menge der konvexen Polytope und aus der Additivität beider Funktionale. Ferner ist klar, daß das signierte Maß $\kappa(K, \cdot)$ in den Ecken von K konzentriert ist.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß von Kuiper [8] ein sehr allgemeines Konzept für kritische Punkte und Krümmungen entwickelt worden ist. Bereits die Definitionen benötigen dort, der angestrebten Allgemeinheit entsprechend, topologische Hilfsmittel. Ziel der vorliegenden Note war es, zumindest für die Mengen des Konvexringes einen völlig elementaren Zugang zu einem Krümmungsbegriff aufzuweisen.

LITERATUR

[1] Aleksandrov, A. D. *Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Akademie-Verlag Berlin, 1955.

[2] Anderson, R. D. and V. L. Klee, Convex functions and upper semicontinuous collections. *Duke Math. J. 19* (1952), pp. 349-357.

[3] Banchoff, T. F. Critical points and curvature for embedded polyhedra. *J. Differential Geometry 1* (1967), pp. 245-256.

[4] —— Critical points and curvature for embedded polyhedral surfaces. *Amer. Math. Monthly 77* (1970), pp. 475-485.

[5] Hadwiger, H. Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine angew. Math. 194* (1955), pp. 101-110.

[6] —— Eckenkrümmung beliebiger kompakter euklidischer Polyeder und Charakteristik von Euler-Poincaré. *L'enseignement math. 15* (1969), pp. 147-151.

[7] Kuiper, N. H. Der Satz von Gauß-Bonnet für Abbildungen in E^n und damit verwandte Probleme. *Jber. Deutsche Math.-Verein. 69* (1967), pp. 77-88.

[8] —— Morse relations for curvature and tightness. *Proc. Liverpool Singularities Symposium II, Lecture Notes in Mathematics 209* (1971), pp. 77-89. Springer-Verlag Berlin et al.

[9] Matheron, G. *Random sets and integral geometry.* Wiley, New York et al., 1975.

[10] Perles, M. A. and G. T. Sallee, Cell complexes, valuations, and the Euler relation. *Can. J. Math. 22* (1970), pp. 235-241.

[11] Shephard, G. C. Euler type relations for convex polytopes. *Proc. London Math. Soc. (3) 18* (1968), pp. 597-606.

(Reçu le 10 juin 1976)

Rolf Schneider

Mathematisches Institut der Universität
Hebelstr. 40
D-7800 Freiburg i.Br.