

# Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où  $T_i(A, K, K)$  est l'espace vectoriel des éléments indécomposables de  $\text{Tor}_i^A(K, K)$ . Mais alors l'égalité  $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$  a lieu si et seulement si  $\pi$  est l'application nulle. Un exemple va montrer que cette propriété n'est pas toujours satisfaite.

L'espace vectoriel  $T_3(A, K, K)$ , qui concerne la notion d'intersection complète, est un quotient du deuxième module d'homologie à la Koszul. Il est donc possible de remplacer la paire quelconque  $(A, \alpha)$ , où  $\alpha$  appartient à  $T_3(A, K, K)$ , par une paire générique  $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ . La situation se simplifie maintenant: ou bien l'élément  $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$  est nul et alors  $\pi$  est toujours nul et  $\delta_{2p+1}$  est toujours égal à  $\varepsilon_{2p+1}$ , ou bien l'élément  $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$  n'est pas nul et alors  $\tilde{A}$  fournit l'exemple recherché d'un anneau avec  $\delta_{2p+1}$  strictement inférieur à  $\varepsilon_{2p+1}$ . Le calcul montre que l'élément  $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$  n'est pas nul. Il faut donc se contenter de la propriété suivante:

$$\delta_{2p+1} \leq \varepsilon_{2p+1} \leq \delta_{2p+1} + \varepsilon_3.$$

Le cas où  $\varepsilon_3$  est nul n'apporte rien de nouveau. En effet l'anneau  $A$  est alors une intersection complète, ce qui oblige la déviation  $\varepsilon_{2p+1}$  et l'invariant  $\delta_{2p+1}$  à être nuls.

## INTRODUCTION

Il est possible de résoudre projectivement le  $A$ -module  $K$  par une  $A$ -algèbre simpliciale  $P$  qui est libre en chaque degré, comme  $A$ -algèbre. Le produit tensoriel  $P \otimes_A K$  est alors une  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  qui est libre en chaque degré, comme  $K$ -algèbre. L'espace vectoriel  $H_n[R]$  est évidemment toujours égal à l'espace vectoriel  $\text{Tor}_n^A(K, K)$ . De plus la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  est munie d'une augmentation  $\rho: R \rightarrow K$ . Son noyau  $I$  est un idéal simplicial de l'anneau simplicial  $R$ . Il est utile d'en considérer les puissances successives  $I^k$ , calculées degré par degré. En particulier le quotient  $I/I^2$  est un  $K$ -module simplicial, dont le complexe correspondant est par définition le complexe cotangent de la  $A$ -algèbre  $K$ . L'espace vectoriel  $H_n[I/I^2]$ , qui est l'espace vectoriel  $H_n(A, K, K)$  de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives, a une dimension finie  $\delta_n$ , l'anneau local  $A$  étant supposé noethérien.

Dénotons par  $S^r$  le foncteur «  $r$ -ème produit symétrique » de la catégorie des  $K$ -modules et par  $S$  leur somme directe, qui est le foncteur « algèbre

symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des  $K$ -modules simpliciaux. Si  $M$  est un  $K$ -module simplicial, alors l'homologie  $H[SM]$  a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\sum b_j x^j = (1+x)^{e_1} (1-x^2)^{-e_2} \dots$$

Les nombres de Betti  $b_j$  sont les dimensions des espaces vectoriels  $H_j[SM]$  et les nombres positifs ou nuls  $e_i$  peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres  $e_i$  se calculent à l'aide des nombres  $m_i$  qui sont les dimensions des espaces vectoriels  $H_i[M]$ . Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part  $e_i$  est égal à  $m_i$  pour  $i \leq 2p$  et d'autre part  $e_{2p+1}$  est égal à la somme  $m_{2p+1} + m_3$ .

Comme la  $K$ -algèbre augmentée  $R$  est libre en chaque degré, il existe pour tout  $r$  un isomorphisme de  $K$ -modules simpliciaux de  $S^r(I/I^2)$  sur  $I^r/I^{r+1}$ . Par conséquent l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I/I^2$  (formée des espaces vectoriels  $H_i(A, K, K)$  connus par leurs dimensions  $\delta_i$ ) détermine complètement l'homologie des  $K$ -modules simpliciaux  $I^r/I^{r+1}$ . Par ailleurs l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I^0 = R$  (formée des espaces vectoriels  $\text{Tor}_j^A(K, K)$  connus par leurs dimensions  $\beta_j$  données par les déviations  $\varepsilon_i$ ) peut être filtrée par les images de l'homologie des  $K$ -modules simpliciaux  $I^r$ . Il reste donc à faire le passage de l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I^r/I^{r+1}$  à l'homologie du  $K$ -module simplicial  $I^r$ . La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a  $H_m[I^n]$  nul pour toute paire  $m < n$ , comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

#### LES 2P PREMIÈRES DÉVIATIONS

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur  $F^r$ , noyau de la transformation naturelle du foncteur  $\otimes^r$  sur le foncteur  $S^r$ , on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme  $\lambda$  entre des  $K$ -modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes  $H_k[\lambda]$  pour  $k = 0, \dots, n$ , alors il donne des épimorphismes  $H_k[S^r\lambda]$  pour  $k = 0, \dots, n+1$  et pour  $r$  quelconque, sauf peut-être pour  $k = n+1$  et  $r = 1$ , bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de  $I$  sur  $I/I^2$ .