2p premières déviations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des K-modules simpliciaux. Si M est un K-module simplicial, alors l'homologie $H[SM]$ a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\Sigma b_j x^j = (1+x)^{e_1}(1-x^2)^{-e_2} \dots .$$

Les nombres de Betti b_j sont les dimensions des espaces vectoriels $H_j[SM]$ et les nombres positifs ou nuls e_i peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres e_i se calculent à l'aide des nombres m_i qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_i[M]$. Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part e_i est égal à m_i pour $i \leqslant 2p$ et d'autre part e_{2p+1} est égal à la somme $m_{2p+1} + m_3$.

Comme la K-algèbre augmentée R est libre en chaque degré, il existe pour tout r un isomorphisme de K-modules simpliciaux de $S^r(I/I^2)$ sur I^r/I^{r+1}. Par conséquent l'homologie du K-module simplicial I/I^2 (formée des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$ connus par leurs dimensions δ_i) détermine complètement l'homologie des K-modules simpliciaux I^r/I^{r+1}. Par ailleurs l'homologie du K-module simplicial $I^0 = R$ (formée des espaces vectoriels $\operatorname{Tor}_j^A(K, K)$ connus par leurs dimensions β_j données par les déviations ε_i) peut être filtrée par les images de l'homologie des K-modules simpliciaux I^r. Il reste donc à faire le passage de l'homologie du K-module simplicial I^r/I^{r+1} à l'homologie du K-module simplicial I^r. La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a $H_m[I^n]$ nul pour toute paire $m < n$, comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

Les 2p premières déviations

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur F^r, noyau de la transformation naturelle du foncteur $\otimes^r$ sur le foncteur S^r, on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme λ entre des K-modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes $H_k[\lambda]$ pour $k = 0,\dots,n$, alors il donne des épimorphismes $H_k[S^r\lambda]$ pour $k = 0,\dots, n+1$ et pour r quelconque, sauf peut-être pour $k = n+1$ et $r = 1$, bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de I sur I/I^2.

On va utiliser l'homomorphisme canonique de $H_n[I]$ dans $H_n[I/I^2]$, autrement dit de $\mathrm{Tor}_n^A(K, K)$ dans $H_n(A, K, K)$, pour n différent de 0. Les produits non-triviaux de $H[I]$ proviennent de l'image de l'homomorphisme de $H[I] \otimes H[I]$ dans $H[I]$, qui passe au travers de $H[I^2]$ et les puissances divisées de $H[I]$ proviennent de l'image de l'application partiellement définie de $H[I]$ dans $H[I]$, qui passe au travers de $H[I^p]$ donc de $H[I^2]$. Cela étant remarqué, on peut donc définir un homomorphisme canonique et utile

$$\eta_n : T_n(A, K, K) \to H_n(A, K, K)$$

avec l'isomorphisme de définition

$$T_n(A, K, K) \cong \mathrm{Tor}_n^A(K, K) / J_n$$

où J_n est le sous-espace vectoriel engendré par tous les produits non-triviaux de degré n et par toutes les puissances divisées de degré n. Comme ici le degré n est au plus égal à $2p+1$, les puissances divisées interviennent dans le seul degré $2p$. Par la théorie des algèbres de Hopf à puissances divisées, il est clair que l'espace vectoriel $T_n(A, K, K)$ a la dimension ε_n. Par suite on a une inégalité $\delta_n \leqslant \varepsilon_n$ si η_n est un épimorphisme et une égalité $\delta_n = \varepsilon_n$ si η_n est un isomorphisme. Appelons Ω_n le conoyau de l'homomorphisme η_n et ω_n la dimension de Ω_n.

Considérons la condition C_n suivante: d'une part η_k est un isomorphisme pour $k \leqslant n-1$ et d'autre part η_n est un épimorphisme. On a donc des homomorphismes surjectifs de $H_k[S^r(I)]$ sur $H_k[S^r(I/I^2)]$. Comme ils passent au travers de $H_k[I^r]$, on obtient des homomorphismes surjectifs de $H_k[I^r]$ sur $H_k[I^r/I^{r+1}]$ pour $k \leqslant n+1$ et pour $r \geqslant 0$, sauf peut-être pour $k = n+1$ et pour $r = 1$. Il en découle une suite exacte pour $r \neq 1$

$$0 \to H_n[I^{r+1}] \to H_n[I^r] \to H_n[I^r/I^{r+1}] \to 0$$

et pour $r = 1$ il faut remplacer le 0 de gauche par $0 \to \Omega_{n+1}$ pour obtenir encore une suite exacte. Grâce au théorème de convergence, on peut sommer sur r et obtenir un isomorphisme non-canonique

$$H_n[S(I/I^2)] \cong H_n[R] + \Omega_{n+1} .$$

La dimension du H_n de droite est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2} \dots (1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}$$

et la dimension du H_n de gauche est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\ldots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si n est au plus $2p$. Mais comme δ_k et ε_k sont égaux pour $k < n$, il reste une égalité simple $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$. Comme par ailleurs on a une inégalité $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$ due à la surjectivité de η_n, cela ne se peut que sous la forme $\delta_n = \varepsilon_n$ (et η_n est un isomorphisme) et $\omega_{n+1} = 0$ (et η_{n+1} est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition C_n par induction sur $n \leqslant 2p+1$ et les nombres δ_n et ε_n sont égaux pour $n \leqslant 2p$ (ou quelconque en caractéristique nulle).

La 2p+1-ème déviation

Nous venons de le constater, l'homomorphisme η_{2p+1} est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir $\varepsilon_{2p+1} \geqslant \delta_{2p+1}$. Ce qui a été fait ci-dessus pour $n \leqslant 2p$ peut être répété en partie pour $n = 2p+1$. Mais alors la dimension du n-ème module d'homologie de $S\,(I/I^2)$ est donné par le coefficient de x^{2p+1} dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\ldots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}\,.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \delta_3\,.$$

En particulier les homomorphismes η_{2p+1} et η_{2p+2} sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant δ_3 est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local A, complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations ε_i et des invariants δ_i pour $i \geqslant 3$. Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ et $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$, sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une K-algèbre simpliciale augmentée R d'idéal d'augmentation connexe I. On dénote par J le sous-espace produit $H\,[I].\,H\,[I]$ de $H\,[I]$, les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit $\overline{K}$ une autre copie de K, opérant sur $H\,[I]$ grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur K grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile π