

Situation générique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1} . En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

SITUATION GÉNÉRIQUE

Il faut considérer le K -module $H_3[I]/J_3$, autrement dit le K -module quotient

$$\text{Tor}_3^A(K, K)/\text{Tor}_2^A(K, K) \cdot \text{Tor}_1^A(K, K).$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1 . H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2 . Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs m_1, m_2, \dots, m_n de l'idéal maximal M de l'anneau local A . Ce représentant g a la forme

$$\sum \mu_{ij} dm_i \wedge dm_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leq i \leq n$

$$\sum \mu_{ij} m_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B , il est naturel de considérer la B -algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leq j < k \leq n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leq i \leq n$

$$\sum y_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\sum y_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\text{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\text{Tor}_2^{Bn}(B, B) \cdot \text{Tor}_1^{Bn}(B, B).$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B -algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B -algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn(Z)$ de la Zn -algèbre Z . Comme le Z -module Zn est

libre, le produit tensoriel $P_n(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $P_n(B)$ de la B_n -algèbre B . Considérons encore les produits tensoriels importants

$$R_n(Z) = P_n(Z) \otimes_{Z_n} Z \text{ et } R_n(B) = P_n(B) \otimes_{B_n} B.$$

Les B -algèbres simpliciales $R_n(Z) \otimes_Z B$ et $R_n(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Z_n dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk} . Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par Tor_2 . Tor_1 , l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Z_n dans A donne un homomorphisme de $R_n(Z)$ dans R , donc un homomorphisme de $R_n(K)$ dans R , par produit tensoriel.

En résumé, on a la K -algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A -algèbre K , avec l'homomorphisme π correspondant, et la K -algèbre simpliciale R_n qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn -algèbre K , avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de R_n dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π . En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K . L'idéal Mn a $n(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

CONCLUSION

Considérons une résolution libre et multiplicative $\tilde{F}n$ de la Kn -algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\text{Tor}^{Kn}(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn , on peut remplacer les K -algèbres simpliciales Rn et $\tilde{R}n$ par les K -algèbres différentielles Fn et $\tilde{F}n$. L'élément gn appartient alors à $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\text{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \text{Tor}_3^{Kn}(K, K).$$