

3. A Formula for $\frac{\Delta(I_1, \dots, I_n)}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. A FORMULA FOR $\frac{\partial (I_1, \dots, I_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$

We obtain a formula which shall be used in Chapter III.

THEOREM 2.5. Let G be a finite reflection group acting on the n -dimensional space V . Let I_1, \dots, I_n be a basic set of homogeneous invariants for G . Let x be a coordinate system for V and $L_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq r$, the r.h.'s for G , each L_i being linear and homogeneous. Then

$$(2.19) \quad \frac{\partial (I_1, \dots, I_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = c \prod_{i=1}^r L_i(x)$$

c being a constant $\neq 0$.

Proof. Let J the left hand side of (2.19). We observe that J is a non-zero homogeneous polynomial of degree $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$. By Theorem 2.2,

$\sum_{i=1}^n (d_i - 1) = r$, so that $\deg J = r$. If k is the real field R , we have the following simple proof of (2.19). $I_i = I_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, is a mapping from x -space to I -space. This mapping is not 1 - 1 in any neighborhood of a point x lying in the r.h. $L_i(x) = 0$, as any point and its reflection get mapped into the same point I . It follows from the Implicit Function Theorem that $J(x) = 0$ whenever $L_i(x) = 0$. Thus $L_i \mid J$, $1 \leq i \leq r$,

and so $\prod_{i=1}^r L_i \mid J$. Since J , $\prod_{i=1}^r L_i$ have the same degree r , we have

$$J = c \prod_{i=1}^r L_i, \quad c \neq 0.$$

For an arbitrary field k , the theorem is proven as follows. Let π be an r.h. with equation $L(x) = 0$ and H the subgroup of h elements in G fixing π . Thus there are $h - 1$ reflections in G with r.h. π . We show that $L^{h-1} \mid J$. By Lemma 2.2, H is a cyclic group generated by an element σ . Furthermore there exists $v \notin \pi$ and a primitive h -th root of 1 such that $\sigma(v) = \zeta v$. Choose a coordinate system $y = (y_1, \dots, y_n)$ in V so that π has the equation $y_n = 0$ and $v = (0, \dots, 0, 1)$ σ then becomes the transformation $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_{n-1}, \zeta y_n)$. Let $x = \tau y$ and $J_i(y) = I_i(\tau y)$, $1 \leq i \leq n$. We have

$$(2.20) \quad J_i(y_1, \dots, y_{n-1}, \zeta y_n) = J_i(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

Let $J_i = \sum A_m y_n^m$, the A_m 's being polynomials in y_1, \dots, y_{n-1} . (2.20) implies that $A_m = 0$ whenever $h \nmid m$, so that $A_m = 0$, $0 \leq m \leq h - 1$. Since

$$\frac{\partial J_i}{\partial y_m} = \sum_m A_m y_n^{m-1},$$

we conclude

$$y_n^{h-1} \left| \frac{\partial J_i}{\partial y_n}, 1 \leq i \leq n. \right.$$

Hence

$$(2.21) \quad y_n^{h-1} \left| \frac{\partial (J_1, \dots, J_n)}{\partial (y_1, \dots, y_n)}, \right.$$

Since

$$\frac{\partial (J_1, \dots, J_n)}{\partial (y_1, \dots, y_n)} = J(x) \cdot \det \tau,$$

(2.21) is equivalent to $L^{h-1}(x) \mid J(x)$. It follows that if $L_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq r$, are the r.h.'s for G , then $\prod_{i=1}^r L_i \mid J$. But $J, \prod_{i=1}^r L_i$ have the same degree r , so that $J = c \prod_{i=1}^r L_i$, $c \neq 0$.

4. DECOMPOSITION OF FINITE REFLECTION GROUPS

We shall decompose every finite reflection group into a direct product of irreducible ones and show that it suffices to study the invariant theory of the irreducible groups.

DEFINITION 2.3. Let the group G act on V . G is said to be reducible iff there exists a proper subspace W invariant under G ; i.e. $\sigma w \in W$ for $\sigma \in G, w \in W$. G is said to be completely reducible iff $V = V_1 \oplus V_2$, V_1 and V_2 being proper invariant subspaces. G is said to be irreducible iff it is not reducible.

THEOREM 2.6. (Maschke [22], Vol. 2, p. 179). *Let G be a finite group acting on the vector space V . If G is reducible, then it is completely reducible.*

Proof. Let V_1 be a proper invariant subspace of V . Let V_2 be a complementary subspace. Thus for $v \in V$, we have a unique decomposition