§1. Rappels et notation.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES ET SURFACES MINIMALES

par Hansklaus RUMMLER [1])

§ 0. INTRODUCTION

Il est bien connu que dans une variété kählérienne les sous-variétés complexes locales sont des sous-variétés minimales par rapport à la métrique riemanienne induite par la métrique kählérienne donnée. Une première démonstration a été donnée par Wirtinger dans [4] pour $\mathbf{C}^n$ avec la métrique canonique $\Sigma\, dz_i \otimes d\bar{z}_i$. Dans la suite, plusieurs auteurs ont généralisé le résultat pour les variétés kählériennes quelconques (voir par ex. [2] et [3]).

Le but de ce travail est de fournir une preuve que cette condition nécessaire est aussi suffisante pour qu'une métrique hermitienne donnée soit kählérienne. En effet, on démontre un résultat encore plus général: Si toutes les sous-variétés complexes locales de dimension 1 sont des surfaces minimales par rapport à la métrique riemanienne induite par une métrique hermitienne donnée, celle-ci est déjà kählérienne. Il suffit même de montrer l'existence d'une famille assez large de sous-variétés complexes locales de dimension 1 qui sont des surfaces minimales.

La démonstration du résultat susmentionné consiste en deux parties (voir les lemmes 1 et 2 du paragraphe 2): la première prouve que l'hypothèse implique que toutes les sous-variétés complexes locales de dimension 2 sont kählériennes avec la métrique hermitienne induite; la seconde en tire la conclusion que la métrique donnée est déjà kählérienne.

Vu sa simplicité et pour être complet nous donnons également la preuve de la nécessité de la condition.

§ 1. RAPPELS ET NOTATION.

Soit M une variété complexe. Pour chaque $x \in M$ l'espace tangent T_xM est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, la structure complexe étant fournie par l'application $(dz_1, ..., dz_n) : T_xM \to \mathbf{C}^n$ si $z_1, ..., z_n$ sont des coor-

[1]) Supporté par une bourse du Fonds national suisse de la Recherche.

données holomorphes en x. La multiplication par le scalaire $i \in \mathbf{C}$ est notée $J : T_x M \to T_x M$. Pour $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, n$ (décomposition en parties réelle et imaginaire) on a donc

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \; j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Soit (,) une métrique hermitienne. En la décomposant en ses parties réelle et imaginaire, $(,) = < , > + i\omega$, on obtient la métrique riemannienne induite $< , > := Re\,(,)$ ainsi que la forme différentielle de degré 2, $\omega := \mathrm{Im}\,(,)$, appelée forme fondamentale.

J, $< , >$ et ω sont reliés par les formules suivantes:

$$< J\xi, \eta > = - < \xi, J\eta > , \quad < J\xi, J\eta > = < \xi, \eta > \tag{2}$$

$$\omega(\xi, \eta) = < \xi, J\eta > \tag{3}$$

pour $\xi, \eta \in T_x M$, $x \in M$.

La métrique hermitienne (,) est dite *kählérienne*, si sa forme fondamentale est fermée:

$$d\omega = 0 . \tag{4}$$

Cette définition est équivalente à une caractérisation plus géométrique: Si D est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne $< , >$, alors D est $\mathbf{C}$-linéaire dans la seconde variable, c'est-à-dire on a

$$D_\xi (J\eta) = J(D_\xi \eta) \tag{5}$$

pour tout champ de vecteur η sur M et pour tout vecteur tangent ξ. (Quant à l'équivalence de (4) et (5), voir p. ex. [2], vol. II, p. 142).

Soit maintenant M une variété différentiable (de classe $\mathscr{C}^\infty$) munie d'une métrique riemannienne $< , >$, et soit D sa connexion de Levi-Civita. Pour une sous-variété différentiable locale N avec un champ de vecteur normal local v (c'est-à-dire $v : N \to TM$, $v(x) \in T_x N^\perp$, $\| v(x) \| = 1$), on définit *l'application de Weingarten* associée à ce champ normal v: c'est l'application $W_x^v = T_x N \to T_x N$, $W_x^v(\xi) = -pr_x(D_\xi v)$, où $pr_x : T_x M \to T_x N$ est la projection orthogonale. W_x^v est définie pour tout x dans le domaine de v, et c'est une application symétrique par rapport à la métrique riemanienne induite sur N. Sa trace décrit la variation de l'élément de volume pour les variations de N dans la direction v, et N est appelée *sous-variété minimale* de M si cette trace $tr\,W_x^v$ est nulle pour tous les champs de vecteur normaux v sur N. (Cf. [2], vol. II, p. 34. Dans le cas classique d'une hyper-surface N dans l'espace euclidien $M = \mathbf{R}^n$,

$tr\ W^{\nu}$ est la courbure moyenne de N, orienté par le champ normal ν.) C'est une remarque triviale mais très utile que la trace de l'application de Weingarten peut être calculée par la formule suivante :

$$tr\ W_x^{\nu} = - \sum_{j=1}^{p} < D_{\xi_j} \nu\ ,\ \xi_j > \tag{6}$$

si $(\xi_1, ..., \xi_p)$ est une base orthonormale de $T_x N$.

§ 2. Métrique hermitienne et sous-variétés minimales.

Soit de nouveau M une variété complexe dotée d'une métrique hermitienne (,). Cette fois, on considère à la fois la structure de variété complexe hermitienne et celle de variété différentiable riemannienne induite, et on se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Pour la métrique hermitienne donnée les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *C'est une métrique kählérienne.*

(b) *Par rapport à la métrique riemannienne induite, toute sous-variété complexe locale de* M *est une sous-variété minimale.*

(c) *Par rapport à la métrique riemannienne induite, toute sous-variété complexe locale de dimension* 1 *dans* M *est une surface minimale.*

Remarque. Dans (b) et (c) c'est en général important de considérer les sous-variétés complexes locales parce que (a) est une condition locale et que la famille des sous-variétés complexes globales peut être aussi restreinte qu'elle vérifie (b) sans que la métrique soit kählérienne. Néanmoins, la preuve du théorème montre que dans certains cas il suffit de vérifier (b) ou (c) pour les sous-variétés complexes globales.

Démonstration.

(a) ⇒ (b). Soit N une sous-variété analytique complexe locale dans M avec un champ de vecteur normal ν et soient ξ, η deux champs tangents à N. On a alors — avec les notations du paragraphe précédent —

$$\begin{aligned} < D_{J\xi}\nu, J\eta > &= - < \nu, D_{J\xi} J\eta > = - < \nu, JD_{J\xi}\eta > \\ &= - < \nu, JD_\eta J\xi + J[J\xi, \eta] > = < \nu, D_\eta \xi > \\ &= < \nu, D_\xi \eta + [\eta, \xi] > = < \nu, D_\xi \eta > \\ &= - < D_\xi \nu, \eta > . \end{aligned}$$