

5. Application to schemes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

At this point, k is a field (the quotient field of A_0/\mathfrak{P}) and R is a graded algebra over the field k , so all assumptions of theorem B are fulfilled. Moreover let ε the composition of the natural maps

$$A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow R.$$

In degree 0, ε_0 is nothing else than the natural map from A_0 into k with kernel \mathfrak{P} . Since φ has the same kernel \mathfrak{P} , it factors through ε_0 , making K an algebraically closed extension of k .

We quote now theorem B. There exists a k -linear ring homomorphism $f: R \rightarrow K$ such that $f(R^+) \neq 0$. The composite map $\Psi = f\varepsilon$ has all the required properties.

5. APPLICATION TO SCHEMES

We keep the notation of theorem D. Recall that the spectrum $S = \mathbf{Spec}(A_0)$ of A_0 is the set of all prime ideals in A_0 ; the projective spectrum $X = \mathbf{Proj}(A)$ of A is the set of all *graded* prime ideals in A , which do not contain the ideal $A^+ = \bigoplus_{d \geq 1} A_d$. We have a natural map $\pi: X \rightarrow S$ associating to every graded prime ideal \mathfrak{P} in A the prime ideal $\mathfrak{P} \cap A_0$ in A_0 .

Moreover S and X are endowed with their respective Zariski topologies. A set F in S (resp. X) is closed if and only if there exists an ideal \mathfrak{A} in A_0 (resp. A) such that F is the set of ideals \mathfrak{P} of S (resp. X) containing \mathfrak{A} . It is obvious that π is continuous.

The following theorem is Grothendieck's version of the elimination theorem. Using his language, it is the main step in the proof that $X = \mathbf{Proj}(A)$ is a proper scheme over $S = \mathbf{Spec}(A_0)$.

THEOREM E. *The map $\pi: X \rightarrow S$ is closed, that is the image of a closed set is closed.*

Let $F \subset X$ be closed and let \mathfrak{A} be an ideal in A such that F consists of the graded prime ideals \mathfrak{P} of X containing \mathfrak{A} . Replacing if necessary \mathfrak{A} by the ideal generated by the homogeneous components of its elements, we may and shall assume that \mathfrak{A} is a graded ideal. Let \mathfrak{B} be the set of elements a in A_0 such that $a \cdot A_d \subset \mathfrak{A}$ for large d , and let G be the set of prime ideals in A_0 containing \mathfrak{B} . It is obvious that π maps F into G .

Let \mathfrak{P}_0 be a prime ideal in G , hence $\mathfrak{P}_0 \supset \mathfrak{A}_0$ (where $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \cap A_0$). Denote by k the quotient field of A_0/\mathfrak{P}_0 and by K an algebraically closed

overfield of k . Let φ be the natural composite map $A_0/\mathfrak{A}_0 \rightarrow A_0/\mathfrak{P}_0 \rightarrow k \rightarrow K$. We are now in a position to apply theorem D to the graded ring A/\mathfrak{A} , and we get a ring homomorphism $\Psi : A/\mathfrak{A} \rightarrow K$ extending φ and such that $\Psi((A^+ + \mathfrak{A})/\mathfrak{A}) \neq 0$. Let \mathfrak{P}_d (for $d \geq 1$) be the set of elements a in A_d such that $\Psi(a + \mathfrak{A}) = 0$. Then $\mathfrak{P} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{P}_d$ is a graded prime ideal in A containing \mathfrak{A} with $\mathfrak{P} \not\supset A^+$ and $\mathfrak{P} \cap A_0 = \mathfrak{P}_0$. That is, \mathfrak{P} belongs to F and π maps \mathfrak{P} onto \mathfrak{P}_0 .

(Reçu le 18 mars 1978)

P. Cartier

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
F-91440 — Bures-sur-Yvette

J. Tate

Harvard University
Cambridge, Mass. 02138