

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1978)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES  
**Kapitel:** §1. Solution presque-périodiques de l'équation  $\left(\frac{d}{dt}-A\right)u = 0$   
**Autor:** Zaidman, S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49693>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions  $u(t)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

$A$  étant un opérateur linéaire de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dans l'espace  $\mathcal{X}$ , alors que  $f(t)$  est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du §4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

### § 1. SOLUTION PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach  $\mathcal{X}$ ,  $A$  étant un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{X}$  en lui-même, et  $x(t)$  une fonction continûment différentiable, de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ . Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)x(0),$$

$U(t)$  étant défini comme exponentielle <sup>1)</sup>:

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

*Définition 1.1.* L'espace de Banach  $\mathcal{X}$  est parfait si les conditions

$x(t)$  bornée de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$

$x'(t)$  presque périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$

entraînent

$x(t)$  est presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ .

<sup>1)</sup> Voir [7], [8], [9].

On a ici le résultat suivant ([6]):

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $A$  un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait  $\mathcal{X}$ . Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| e^{At} \| < \infty .$$

*Alors, toute solution  $x(t)$  de l'équation  $x'(t) = Ax(t)$  est presque-périodique.*

*Démonstration.* Vu que  $x(t) = e^{At} x(0)$ , il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble  $\{ Ax(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , et donc l'ensemble  $\{ x'(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$  a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue  $f(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$  dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels  $(h_n)_1^\infty$  contient une sous-suite  $(h_{n_p})_1^\infty$ , telle que la suite de fonctions  $(f(t+h_{n_p}))_1^\infty$  soit de Cauchy dans la convergence forte de  $\mathcal{X}$ , uniforme pour  $t \in \mathbf{R}$ .

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de  $x'(t)$  (et donc de  $x(t)$ , vu que  $\mathcal{X}$  est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle  $(h_{n_p})_1^\infty$  de façon que la suite  $\{ x'(h_{n_p}) \}_1^\infty$  soit de Cauchy dans  $\mathcal{X}$ . On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= Ax(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})} x(0) = Ae^{At} e^{Ah_{n_p}} x(0) = Ae^{At} x(h_{n_p}) \\ &= e^{At} Ax(h_{n_p}) = e^{At} x'(h_{n_p}) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q}) \| &= \| e^{At} (x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})) \| \\ &\leq \sup_{-\infty < t < \infty} \| e^{At} \| \| x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}) \| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

## § 2. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS BORNÉES

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).