

## §2. Presque-périodicité des solutions bornées

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On a ici le résultat suivant ([6]):

THÉORÈME 1.1. *Soit  $A$  un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait  $\mathcal{X}$ . Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| e^{At} \| < \infty .$$

*Alors, toute solution  $x(t)$  de l'équation  $x'(t) = Ax(t)$  est presque-périodique.*

*Démonstration.* Vu que  $x(t) = e^{At} x(0)$ , il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble  $\{ Ax(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , et donc l'ensemble  $\{ x'(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$  a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue  $f(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$  dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels  $(h_n)_1^\infty$  contient une sous-suite  $(h_{n_p})_1^\infty$ , telle que la suite de fonctions  $(f(t+h_{n_p}))_1^\infty$  soit de Cauchy dans la convergence forte de  $\mathcal{X}$ , uniforme pour  $t \in \mathbf{R}$ .

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de  $x'(t)$  (et donc de  $x(t)$ , vu que  $\mathcal{X}$  est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle  $(h_{n_p})_1^\infty$  de façon que la suite  $\{ x'(h_{n_p}) \}_1^\infty$  soit de Cauchy dans  $\mathcal{X}$ . On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= Ax(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})} x(0) = Ae^{At} e^{Ah_{n_p}} x(0) = Ae^{At} x(h_{n_p}) \\ &= e^{At} Ax(h_{n_p}) = e^{At} x'(h_{n_p}) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q}) \| &= \| e^{At} (x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})) \| \\ &\leq \sup_{-\infty < t < \infty} \| e^{At} \| \| x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}) \| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

## § 2. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS BORNÉES

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).

THÉORÈME 2.1. Soit  $A$  un opérateur borné auto-adjoint dans l'espace de Hilbert  $H$ , tel que l'on ait, avec  $m_1 < m_2 < 0$ , la relation

$$m_1 \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq m_2 \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Soit  $f(t)$  presque-périodique dans  $H$ ,  $u(t)$  bornée dans  $H$ , et  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ .

Alors,  $u(t)$  est presque-périodique dans  $H$  et est donnée par la formule

(convergente) :  $u(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma$  et l'on a

$$\|u(t)\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t)\|.$$

*Démonstration.* Remarquons au début que notre équation admet une seule solution bornée sur l'axe réel.

En effet, si  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  étaient deux solutions bornées, leur différence  $v(t)$  est une solution bornée sur  $\mathbf{R}$ , de l'équation  $v'(t) = Av(t)$ .

En multipliant scalairement avec  $v(t)$ , on déduit la relation

$$(v'(t), v(t)) = (Av(t), v(t))$$

et aussi l'égalité

$$(v(t), v'(t)) = (v(t), Av(t)) = (Av(t), v(t));$$

on obtient donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 = (Av(t), v(t)) \leq m_2 \|v(t)\|^2 \leq 0,$$

et par conséquent la fonction  $\|v(t)\|^2$  est non-croissante. En intégrant de  $-R$  à 0, on trouve l'inégalité

$$\frac{1}{2} (\|v(0)\|^2 - \|v(-R)\|^2) \leq m_2 \int_{-R}^0 \|v(\sigma)\|^2 d\sigma,$$

ou bien

$$\frac{1}{2|m_2|} (\|v(-R)\|^2 - \|v(0)\|^2) \geq \int_{-R}^0 \|v(\sigma)\|^2 d\sigma.$$

Si  $\|v(t)\|^2$  reste bornée, elle aura une limite pour  $t \rightarrow -\infty$ , et si cette limite est  $> 0$ , on déduit que

$$\lim_{R \uparrow \infty} \int_{-R}^0 \|v(\sigma)\|^2 d\sigma = \infty. \quad \text{Par conséquent, } \lim_{R \uparrow \infty} \|v(-R)\|^2 = \infty$$

aussi, absurde.

Remarquons maintenant que toute solution  $w(t)$  de l'équation  $w'(t) = Aw(t)$  ne s'annule jamais si  $w(t) \neq 0$ . Par conséquent, dans l'inégalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leq m_2 \|w(t)\|^2,$$

on peut diviser par  $\|w(t)\|^2$ , et on en déduit  $\frac{d}{dt} \ln \|w(t)\|^2 \leq 2m_2$ ; en intégrant ensuite de 0 à  $t > 0$ , on obtient

$$\ln \frac{\|w(t)\|^2}{\|w(0)\|^2} \leq 2m_2 t, \text{ et donc } \frac{\|w(t)\|^2}{\|w(0)\|^2} \leq e^{2m_2 t},$$

et enfin  $\|w(t)\|^2 \leq e^{2m_2 t} \|w(0)\|^2$ , où encore, puisque  $w(t) = e^{At} w(0)$ ,  $\|e^{At} w(0)\| \leq e^{m_2 t} \|w(0)\|$ ; ici  $w(0)$  est un élément arbitraire de  $H$ ; par conséquent, pour tout  $t > 0$ , on a l'inégalité  $\|e^{At}\| \leq e^{m_2 t}$  qui est fondamentale dans le reste de la démonstration.

Considérons en effet l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma$ ; on voit que  $t - \sigma > 0$  et donc

$$\|e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\| \leq e^{m_2(t-\sigma)} \sup_{\sigma \in \mathbf{R}} \|f(\sigma)\|$$

( $f(t)$ , comme toute autre fonction presque-périodique, est bornée sur l'axe réel). Aussi

$$\int_{-\infty}^t e^{m_2(t-\sigma)} d\sigma = \frac{1}{|m_2|};$$

notre intégrale est donc convergente, et on a aussi la majoration

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup_{\sigma \in \mathbf{R}} \|f(\sigma)\|$$

Maintenant la fonction  $Z(t)$  définie par cette intégrale est solution de l'équation  $Z' = AZ + f$ , et cela se voit sans difficulté. Donc, vu que  $\|Z(t)\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup \|f(\sigma)\|$ ,  $Z(t)$  est une solution bornée, elle coïncide donc avec  $u(t)$ .

Enfin,

$$Z(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} e^{A\tau} f(t-\tau) d\tau$$

est une fonction presque-périodique; en effet, si  $\varepsilon > 0$  est donné arbitrairement, on trouve, pour chaque  $\xi \in [a, a + L(\varepsilon)]$ , qui est en plus une  $\varepsilon$ -presque-période de  $f$  l'égalité

$$Z(t + \xi) - Z(t) = \int_0^\infty e^{A\tau} [f(t + \xi - \tau) - f(t - \tau)] d\tau,$$

et la majoration

$$\|Z(t + \xi) - Z(t)\| \leq \int_0^\infty e^{m_2\tau} \|f(t + \xi - \tau) - f(t - \tau)\| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{|m_2|}, t \in \mathbf{R},$$

ce qui démontre la presque-périodicité de  $Z(t) = u(t)$ , et donc le Théorème 2.1.

En restant toujours dans un espace de Hilbert  $H$ , on considère de nouveau l'équation différentielle non-homogène

$$(2.1) \quad u'(t) = Au(t) + f(t).$$

On fait les hypothèses suivantes

i)  $f(t)$  est presque-périodique, de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ .

ii)  $A$  est un opérateur linéaire compact de  $H$  en lui-même, jouissant aussi de la propriété suivante:

Il existe une décomposition orthogonale  $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n \oplus \dots$  en sous-espaces de dimension finie, chaque sous-espace  $H_j$ , ainsi que son complément orthogonal  $H_j^\perp$ , étant laissé invariant par  $A$  (qui commute donc avec  $P_j$  et  $(I - P_j)$ , les projections orthogonales sur  $H_j$  et  $H_j^\perp$  respectivement). (Voir [9] pour les définitions de base.)

On a alors le résultat suivant, essentiellement dû à R. Cooke [4].

**THÉORÈME 2.2.** *Soit  $u(t)$  une fonction continûment différentiable de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ , vérifiant l'équation (2.1) avec les hypothèses i), ii), telle que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|u(t)\|_H < \infty.$$

*Alors  $u(t)$  est presque-périodique.*

Pour démontrer ce résultat, on considère les fonctions  $u_j(t) = P_j u(t)$ ,  $f_j(t) = P_j f(t)$ , qui vérifient la relation

$$(2.2) \quad u'_j(t) = Au_j(t) + f_j(t), t \in \mathbf{R}, \forall j = 1, 2, \dots$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle dans l'espace de dimension finie  $H_j$  (cela pour tout  $j = 1, 2, \dots$ ):  $f_j(t)$  est presque-périodique dans  $H_j$  tandis que  $u_j(t)$  est une solution bornée de 2.2). On peut donc appliquer

le résultat classique de Bochner cité dans l'introduction <sup>1)</sup>, pour déduire que chaque fonction  $u_j(t)$  est presque-périodique dans  $H_j$ , et par conséquent, dans  $H$  aussi.

Maintenant, pour tout  $h \in H$ , on a  $h = \sum_{j=1}^{\infty} P_j h$ , et donc, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a que

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t).$$

Considérons aussi la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Au_j(t) = Au(t).$$

Rappelons enfin le fait élémentaire suivant:

*dans la série d'opérateurs  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = I$  qui converge fortement (c'est-à-dire*

*que  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j x = x$ , pour tout  $x \in H$ ), la convergence est uniforme quand  $x$  varie dans tout ensemble relativement compact de  $H$ .*

Vu que  $u(t)$  est fonction bornée dans  $H$ , il résulte que l'ensemble  $\{Au(t)\}_{-\infty < t < \infty}$  est relativement compact dans  $H$ , et par conséquent la série  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t)$  est uniformément convergente pour  $t \in \mathbf{R}$ .

Chaque fonction  $Au_j(t)$  étant manifestement presque-périodique, il s'ensuit que  $Au(t)$  est presque-périodique aussi. Par suite, la dérivée  $u'(t) = Au(t) + f(t)$  est presque-périodique, et puisque  $H$  est un espace parfait <sup>2)</sup>, et  $u(t)$  est bornée, le théorème en résulte.

### § 3. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS A TRAJECTOIRE RELATIVEMENT COMPACTE

Nous allons étudier maintenant des solutions presque-périodiques pour des équations

$$(3.1) \quad u'(t) = Au(t) + f(t).$$

$A$  étant maintenant un opérateur linéaire de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dense, mais non nécessairement continu.

<sup>1)</sup> Précisément le Th. 4.2 (pag. 92) dans [5].

<sup>2)</sup> Théorème de L. Amerio (voir par ex. [1] et [12]).