Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1978)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Autor: Zaidman, S.

Kapitel: §2. Presque-périodicité des solutions bornées

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49693

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On a ici le résultat suivant ([6]):

THÉORÈME 1.1. *Soit A un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait $\mathscr{X}$. Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| e^{At} \| < \infty .$$

Alors, toute solution $x(t)$ de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ est presque-périodique.

Démonstration. Vu que $x(t) = e^{At} x(0)$, il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble $\{ Ax(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact dans $\mathscr{X}$, et donc l'ensemble $\{ (x'(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels $(h_n)_1^\infty$ contient une sous-suite $(h_{n_p})_1^\infty$, telle que la suite de fonctions $(f(t+h_{n_p}))_1^\infty$ soit de Cauchy dans la convergence forte de $\mathscr{X}$, uniforme pour $t \in \mathbf{R}$.

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de $x'(t)$ (et donc de $x(t)$, vu que $\mathscr{X}$ est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle $(h_{n_p})_1^\infty$ de façon que la suite $\{ x'(h_{n_p}) \}_1^\infty$ soit de Cauchy dans $\mathscr{X}$. On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= A\,x(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})}\,x(0) = Ae^{At}\,e^{Ah_{n_p}}\,x(0) = Ae^{At}\,x(h_{n_p}) \\ &= e^{At}\,Ax(h_{n_p}) = e^{At}\,x'(h_{n_p}) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q}) \| &= \| e^{At}(x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})) \| \\ &\leqslant \sup_{-\infty < t < \infty} \| e^{At} \| \, \| x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}) \| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

§ 2. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS BORNÉES

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).

THÉORÈME 2.1. *Soit A un opérateur borné auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H, tel que l'on ait, avec $m_1 < m_2 < 0$, la relation*

$$m_1 \| x \|^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant m_2 \| x \|^2 , \quad \forall x \in H .$$

Soit $f(t)$ presque-périodique dans H, $u(t)$ bornée dans H, et $u'(t) = Au(t) + f(t)$.
Alors, $u(t)$ est presque-périodique dans H et est donnée par la formule (convergente) : $u(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma$ et l'on a

$$\| u(t) \| \leqslant \frac{1}{|m_2|} \sup_{t \in \mathbf{R}} \| f(t) \| .$$

Démonstration. Remarquons au début que notre équation admet une seule solution bornée sur l'axe réel.

En effet, si $u_1(t)$, $u_2(t)$ étaient deux solutions bornées, leur différence $v(t)$ est une solution bornée sur $\mathbf{R}$, de l'équation $v'(t) = Av(t)$.

En multipliant scalairement avec $v(t)$, on déduit la relation

$$\big(v'(t), v(t)\big) = \big(Av(t), v(t)\big)$$

et aussi l'égalité

$$\big(v(t), v'(t)\big) = \big(v(t), Av(t)\big) = \big(Av(t), v(t)\big) ;$$

on obtient donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| v(t) \|^2 = \big(Av(t), v(t)\big) \leqslant m_2 \| v(t) \|^2 \leqslant 0 ,$$

et par conséquent la fonction $\| v(t) \|^2$ est non-croissante. En intégrant de $-R$ à 0, on trouve l'inégalité

$$\frac{1}{2} \left(\| v(0) \|^2 - \| v(-R) \|^2 \right) \leqslant m_2 \int_{-R}^{0} \| v(\sigma) \|^2 \, d\sigma ,$$

ou bien

$$\frac{1}{2|m_2|} \left(\| v(-R) \|^2 - \| v(0) \|^2 \right) \geqslant \int_{-R}^{0} \| v(\sigma) \|^2 \, d\sigma .$$

Si $\| v(t) \|^2$ reste bornée, elle aura une limite pour $t \to -\infty$, et si cette limite est > 0, on déduit que

$\lim_{R \uparrow \infty} \int_{-R}^{0} \| v(\sigma) \|^2 \, d\sigma = \infty$. Par conséquent, $\lim_{R \uparrow \infty} \| v(-R) \|^2 = \infty$

aussi, absurde.

Remarquons maintenant que toute solution $w(t)$ de l'équation $w'(t) = Aw(t)$ ne s'annule jamais si $w(t) \not\equiv 0$. Par conséquent, dans l'inégalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| w(t)\|^2 \leqslant m_2 \| w(t)\|^2 ,$$

on peut diviser par $\| w(t)\|^2$, et on en déduit $\frac{d}{dt} ln \| w(t)\|^2 \leqslant 2m_2$; en intégrant ensuite de 0 à $t > 0$, on obtient

$$ln \frac{\| w(t)\|^2}{\| w(0)\|^2} \leqslant 2m_2 t , \text{ et donc } \frac{\| w(t)\|^2}{\| w(0)\|^2} \leqslant e^{2m_2 t} ,$$

et enfin $\| w(t)\|^2 \leqslant e^{2m_2 t} \| w(0)\|^2$, où encore, puisque $w(t) = e^{At} w(0)$, $\| e^{At} w(0)\| \leqslant e^{m_2 t} \| w(0)\|$; ici $w(0)$ est un élément arbitraire de H; par conséquent, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité $\| e^{At}\| \leqslant e^{m_2 t}$ qui est fondamentale dans le reste de la démonstration.

Considérons en effet l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma$; on voit que $t - \sigma > 0$ et donc

$$\| e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\| \leqslant e^{m_2(t-\sigma)} \sup_{\sigma \in \mathbf{R}} \|f(\sigma)\|$$

($f(t)$, comme toute autre fonction presque-périodique, est bornée sur l'axe réel). Aussi

$$\int_{-\infty}^{t} e^{m_2(t-\sigma)}\, d\sigma = \frac{1}{|m_2|} ;$$

notre intégrale est donc convergente, et on a aussi la majoration

$$\left\| \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma \right\| \leqslant \frac{1}{|m_2|} \sup_{\sigma \in \mathbf{R}} \|f(\sigma)\|$$

Maintenant la fonction $Z(t)$ définie par cette intégrale est solution de l'équation $Z' = AZ + f$, et cela se voit sans difficulté. Donc, vu que $\| Z(t)\| \leqslant \frac{1}{|m_2|} \sup \|f(\sigma)\|$, $Z(t)$ est une solution bornée, elle coïncide donc avec $u(t)$.

Enfin,

$$Z(t) = u(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\, d\sigma = \int_{0}^{\infty} e^{A\tau} f(t-\tau)\, d\tau$$

est une fonction presque-périodique; en effet, si $\varepsilon > 0$ est donné arbitrairement, on trouve, pour chaque $\xi \in [a, a+L(\varepsilon)]$, qui est en plus une ε-presque-période de f l'égalité

$$Z(t+\xi) - Z(t) = \int_0^\infty e^{A\tau}[f(t+\xi-\tau) - f(t-\tau)]\, d\tau ,$$

et la majoration

$$\| Z(t+\xi) - Z(t) \| \leqslant \int_0^\infty e^{m_2\tau} \| f(t+\xi-\tau) - f(t-\tau) \| \, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{|m_2|} , t \in \mathbf{R} ,$$

ce qui démontre la presque-périodicité de $Z(t) = u(t)$, et donc le Théorème 2.1.

En restant toujours dans un espace de Hilbert H, on considère de nouveau l'équation différentielle non-homogène

$$u'(t) = Au(t) + f(t) . \tag{2.1}$$

On fait les hypothèses suivantes

i) $f(t)$ est presque-périodique, de $\mathbf{R}$ dans H.

ii) A est un opérateur linéaire compact de H en lui-même, jouissant aussi de la propriété suivante:

Il existe une décomposition orthogonale $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus \ldots$ en sous-espaces de dimension finie, chaque sous-espace H_j, ainsi que son complément orthogonal $H_j^\perp$, étant laissé invariant par A (qui commute donc avec P_j et $(I-P_j)$, les projections orthogonales sur H_j et $H_j^\perp$ respectivement). (Voir [9] pour les définitions de base.)

On a alors le résultat suivant, essentiellement dû à R. Cooke [4].

THÉORÈME 2.2. *Soit* $u(t)$ *une fonction continûment différentiable de* $\mathbf{R}$ *dans* H, *vérifiant l'équation* (2.1) *avec les hypothèses* i), ii), *telle que* $\sup_{t\in\mathbf{R}} \| u(t) \|_H < \infty$.
Alors $u(t)$ *est presque-périodique.*

Pour démontrer ce résultat, on considère les fonctions $u_j(t) = P_j u(t)$, $f_j(t) = P_j f(t)$, qui vérifient la relation

$$u_j'(t) = Au_j(t) + f_j(t), \; t \in \mathbf{R}, \forall j = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle dans l'espace de dimension finie H_j (cela pour tout $j = 1, 2, \ldots$): $f_j(t)$ est presque-périodique dans H_j tandis que $u_j(t)$ est une solution bornée de 2.2). On peut donc appliquer

le résultat classique de Bochner cité dans l'introduction [1]), pour déduire que chaque fonction $u_j(t)$ est presque-périodique dans H_j, et par conséquent, dans H aussi.

Maintenant, pour tout $h \in H$, on a $h = \sum_{j=1}^{\infty} P_j h$, et donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a que

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t).$$

Considérons aussi la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Au_j(t) = Au(t).$$

Rappelons enfin le fait élémentaire suivant:

dans la série d'opérateurs $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = I$ *qui converge fortement* (c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{\infty} P_j x = x$, pour tout $x \in H$), *la convergence est uniforme quand* x *varie dans tout ensemble relativement compact de* H.

Vu que $u(t)$ est fonction bornée dans H, il résulte que l'ensemble $\{Au(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ est relativement compact dans H, et par conséquent la série $\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t)$ est uniformément convergente pour $t \in \mathbf{R}$.

Chaque fonction $Au_j(t)$ étant manifestement presque-périodique, il s'ensuit que $Au(t)$ est presque-périodique aussi. Par suite, la dérivée $u'(t) = Au(t) + f(t)$ est presque-périodique, et puisque H est un espace parfait [2]), et $u(t)$ est bornée, le théorème en résulte.

§ 3. Presque-périodicité des solutions a trajectoire relativement compacte

Nous allons étudier maintenant des solutions presque-périodiques pour des équations

$$u'(t) = Au(t) + f(t). \tag{3.1}$$

A étant maintenant un opérateur linéaire de domaine $\mathscr{D}(A)$ dense, mais non nécessairement continu.

---

[1]) Précisément le Th. 4.2 (pag. 92) dans [5].
[2]) Théorème de L. Amerio (voir par ex. [1] et [12]).