

# §3. Presque-périodicité des solutions a trajectoire relativement compacte

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

le résultat classique de Bochner cité dans l'introduction <sup>1)</sup>, pour déduire que chaque fonction  $u_j(t)$  est presque-périodique dans  $H_j$ , et par conséquent, dans  $H$  aussi.

Maintenant, pour tout  $h \in H$ , on a  $h = \sum_{j=1}^{\infty} P_j h$ , et donc, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a que

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t).$$

Considérons aussi la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Au_j(t) = Au(t).$$

Rappelons enfin le fait élémentaire suivant:

*dans la série d'opérateurs  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = I$  qui converge fortement (c'est-à-dire*

*que  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j x = x$ , pour tout  $x \in H$ ), la convergence est uniforme quand  $x$  varie dans tout ensemble relativement compact de  $H$ .*

Vu que  $u(t)$  est fonction bornée dans  $H$ , il résulte que l'ensemble  $\{Au(t)\}_{-\infty < t < \infty}$  est relativement compact dans  $H$ , et par conséquent la série  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t)$  est uniformément convergente pour  $t \in \mathbf{R}$ .

Chaque fonction  $Au_j(t)$  étant manifestement presque-périodique, il s'ensuit que  $Au(t)$  est presque-périodique aussi. Par suite, la dérivée  $u'(t) = Au(t) + f(t)$  est presque-périodique, et puisque  $H$  est un espace parfait <sup>2)</sup>, et  $u(t)$  est bornée, le théorème en résulte.

### § 3. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS A TRAJECTOIRE RELATIVEMENT COMPACTE

Nous allons étudier maintenant des solutions presque-périodiques pour des équations

$$(3.1) \quad u'(t) = Au(t) + f(t).$$

$A$  étant maintenant un opérateur linéaire de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dense, mais non nécessairement continu.

<sup>1)</sup> Précisément le Th. 4.2 (pag. 92) dans [5].

<sup>2)</sup> Théorème de L. Amerio (voir par ex. [1] et [12]).

Le premier résultat, assez simple, et bien connu (voir [1] et [3]), concerne l'équation homogène. Précisément on a le

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $A$  un opérateur linéaire de domaine dense  $\mathcal{D}(A)$  dans l'espace de Hilbert  $H$ , tel que  $(Ah, k)_H = -(h, Ak)_H$ , pour tout  $h, k \in \mathcal{D}(A)$ . Soit  $u(t)$  une fonction continûment différentiable de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ , à valeurs dans  $\mathcal{D}(A)$ , telle que  $u'(t) = Au(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Supposons que l'ensemble  $\{u(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $H$ . Alors  $u(t)$  est presque-périodique dans  $H$ .*

*Démonstration.* Soit  $v(t)$  une solution arbitraire de l'équation  $v'(t) = Av(t)$ ; soit  $\phi(t)$  la fonction à valeurs réelles

$$\phi(t) = \|v(t)\|_H^2 = (v(t), v(t))_H;$$

$\phi(t)$  est donc continûment différentiable et l'on a

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= (v'(t), v(t))_H + (v(t), v'(t))_H \\ &= (Av(t), v(t))_H + (v(t), Av(t))_H = 0 \end{aligned}$$

vu que  $A$  est antisymétrique. Il résulte donc  $\phi(t) = \phi(0)$ , c'est-à-dire  $\|v(t)\|_H^2 = \|v(0)\|_H^2$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Prenons maintenant, pour tout nombre réel  $\sigma$ , la fonction translatée  $v_\sigma(t) = u(t + \sigma)$ ; on a  $v'_\sigma(t) = Av_\sigma(t)$ ; pour  $\sigma_1, \sigma_2$  arbitraires on trouve que

$$(v_{\sigma_1}(t) - v_{\sigma_2}(t))' = A(v_{\sigma_1}(t) - v_{\sigma_2}(t)),$$

et donc

$$\|v_{\sigma_1}(t) - v_{\sigma_2}(t)\|_H^2 = \|v_{\sigma_1}(0) - v_{\sigma_2}(0)\|_H^2, \quad t \in \mathbf{R},$$

ce qui revient à l'égalité

$$\|u(t + \sigma_1) - u(t + \sigma_2)\|_H^2 = \|u(\sigma_1) - u(\sigma_2)\|_H^2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Si maintenant  $(\sigma_n)_1^\infty$  est une suite arbitraire de réels, on peut en extraire une sous-suite  $(\sigma_{n_p})_1^\infty$ , de façon que la suite  $\{u(\sigma_{n_p})\}_{p=1}^\infty$  soit de Cauchy dans  $H$ . Mais alors,

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|u(t + \sigma_{n_p}) - u(t + \sigma_{n_q})\|_H^2 = \|u(\sigma_{n_p}) - u(\sigma_{n_q})\|_H^2$$

et par conséquent la suite de translatées  $\{u(t + \sigma_{n_p})\}_{p=1}^\infty$ , est une suite de Cauchy par rapport à la convergence uniforme sur  $\mathbf{R}$ . Cela démontre la presque-périodicité de  $u(t)$ , d'après le critère de Bochner.

Le deuxième résultat ici concerne l'équation non-homogène,  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ , dans un espace de Banach arbitraire  $\mathcal{X}$ . Par hypothèse,  $A$  sera maintenant un opérateur linéaire, fermé, de domaine dense  $\mathcal{D}(A)$  dans  $\mathcal{X}$ , qui est le générateur infinitésimal d'un groupe  $G(t)$  de transformations linéaires continues de  $\mathcal{X}$  en lui-même. Pour être plus précis, on suppose que  $G(t)$  est une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ <sup>1)</sup>, telle que  $G(t)x$  est continue pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ;  $G(0)$  sera l'opérateur identité dans  $\mathcal{X}$ , et on aura  $G(t_1 + t_2) = G(t_1)G(t_2)$  pour toute paire de nombres réels  $t_1$  et  $t_2$ . On suppose aussi que la relation

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{G(\eta)x - x}{\eta} = Ax$$

a lieu si et seulement si  $x \in \mathcal{D}(A)$ . Nous allons démontrer le résultat suivant (voir [10]):

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $f(t)$  une fonction continue presque-périodique de  $t \in \mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$ . Soit  $u(t)$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{D}(A)$ , continûment différentiable dans  $\mathcal{X}$ , vérifiant la relation :*

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

*Supposons aussi que l'ensemble  $\{u(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  soit relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , et que la fonction  $G(t)x$  soit presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Alors  $u(t)$  est aussi presque-périodique.*

Le théorème sera une conséquence de certains lemmes de caractère élémentaire. Premièrement, un résultat de représentation des solutions moyennant une formule intégrale:

**LEMME 1.** *Si  $f(t)$  est continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , et si  $u(t)$  est une solution de l'équation  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ , on a*

$$u(t) = G(t)u(0) + \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On considère en effet la relation  $u'(\sigma) = Au(\sigma) + f(\sigma)$ ,  $\sigma \in \mathbf{R}$ , et on applique des deux côtés l'opérateur  $G(t-\sigma)$ , où  $t$  est fixé. En intégrant de 0 à  $t$ , on déduit

$$\int_0^t G(t-\sigma)u'(\sigma) d\sigma = \int_0^t G(t-\sigma)Au(\sigma) d\sigma + \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma.$$

<sup>1)</sup> Espace des opérateurs linéaires continus de  $x$  en  $x$ .

D'un autre côté, ce n'est pas difficile à voir que  $\frac{d}{d\sigma} G(t-\sigma) u(\sigma) = -AG(t-\sigma)u(\sigma) + G(t-\sigma)u'(\sigma)$ ; en intégrant ici de 0 à  $t$  on trouve que

$$u(t) - G(t)u(0) = - \int_0^t AG(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma + \int_0^t G(t-\sigma)u'(\sigma) d\sigma$$

et en additionnant on voit, par la commutativité de  $G(t-\sigma)$  avec  $A$ , l'égalité

$$u(t) - G(t)u(0) = \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma, t \in \mathbf{R}.$$

Pour intégrer on utilise le fait immédiat que  $G(\xi)h(\xi)$  est continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , pour toute fonction continue  $h(\xi)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ . On a aussi un résultat de compacité exprimé dans le lemme suivant.

LEMME 2. Soit  $G(t)$  un groupe à un paramètre fortement continu, ayant la propriété que l'ensemble  $\{G(t)x\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Supposons aussi que  $f(t)$  soit une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , telle que l'ensemble  $\{f(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  soit relativement compact dans  $\mathcal{X}$ .

Alors, l'ensemble  $\{G(t)f(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ .

En effet, on remarque premièrement que  $\sup \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} = M < \infty$  d'après le théorème sur la borne uniforme, et vu que tout ensemble relativement compact est borné.

Prenons alors une suite arbitraire  $\{t_n\}_1^\infty$  de réels et extrayons une sous-suite  $\{t'_n\}_1^\infty$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t'_n) = \omega \in \mathcal{X}$ . Après une seconde extraction,

on trouve une sous-suite  $\{t''_n\}_1^\infty \subset \{t'_n\}_1^\infty$  telle que la suite  $\{G(t''_n)\omega\}_0^\infty$  est aussi de Cauchy. On en déduit alors que la suite  $\{G(t''_n)f(t''_n)\}_{n=1}^\infty$  est de Cauchy dans  $\mathcal{X}$ , en observant l'égalité

$$G(t''_n)f(t''_n) - G(t''_m)f(t''_m) = [G(t''_n) - G(t''_m)][f(t''_n) - \omega] + [G(t''_n) - G(t''_m)]\omega + G(t''_m)[f(t''_n) - f(t''_m)],$$

et donc la majoration

$$\|G(t''_n)f(t''_n) - G(t''_m)f(t''_m)\| \leq 2M \|f(t''_n) - \omega\| + \|[G(t''_n) - G(t''_m)]\omega\| + M \|f(t''_n) - f(t''_m)\|.$$

On passe ensuite à un résultat de presque-périodicité, exprimé dans le

LEMME 3. Soit  $G(t)$  un groupe à un paramètre fortement continu, tel que la fonction  $G(t)x$  soit presque-périodique pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Soit

$f(t)$  une fonction presque-périodique dans  $\mathcal{X}$ . Alors la fonction  $G(t)f(t)$  est aussi presque-périodique.

Pour prouver ce Lemme, remarquons que l'ensemble  $\{f(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , ce qui arrive pour toute fonction presque-périodique <sup>1)</sup>. Il existe alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , des éléments  $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_\nu)$ , de façon que, pour tout  $t$  réel, on ait la relation

$$f(t) \in \bigcup_{k=1}^{\nu} \mathfrak{S}(f(t_k), \varepsilon) \text{ où } \mathfrak{S}(y_0, \varepsilon) = \{x \in X, \|x - y_0\| < \varepsilon\}.$$

Prenons maintenant en considération les fonctions presque-périodiques (en nombre fini)

$$f(t), G(t)f(t_1), G(t)f(t_2), \dots, G(t)f(t_\nu)$$

d'après résultats connus <sup>2)</sup>, il existe un ensemble relativement dense  $\{\tau\}_\varepsilon$  commun pour ces fonctions, formé de  $\varepsilon$ -presque-périodes. De plus, comme dans le Lemme 2, on a  $\sup_{t \in \mathbf{R}} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} = M < \infty$ . En prenant arbitrairement  $\bar{t} \in \mathbf{R}$ , on trouve un  $t_k$ , tel que  $\|f(\bar{t}) - f(t_k)\| < \varepsilon$ . On déduit ensuite, pour  $\tau \in \{\tau\}_\varepsilon$ , la relation

$$\begin{aligned} & G(\bar{t} + \tau)f(\bar{t} + \tau) - G(\bar{t})f(\bar{t}) \\ &= G(\bar{t} + \tau)[f(\bar{t} + \tau) - f(\bar{t})] + G(\bar{t} + \tau)[f(\bar{t}) - f(t_k)] \\ &+ G(\bar{t} + \tau)f(t_k) - G(\bar{t})f(t_k) + G(\bar{t})[f(t_k) - f(\bar{t})] \end{aligned}$$

et donc la majoration

$$\|G(\bar{t} + \tau)f(\bar{t} + \tau) - G(\bar{t})f(\bar{t})\| \leq M\varepsilon + M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = 3M\varepsilon + \varepsilon.$$

ce qui prouve le Lemme,  $\bar{t}$  étant un réel arbitraire.

LEMME 4. Si  $h(t)$  est une fonction presque périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , alors  $\check{h}(t) = h(-t)$  est aussi une fonction presque-périodique.

En effet, si  $\tau$  est une  $\varepsilon$ -presque-période de  $h(t)$ , alors  $-\tau$  est une  $\varepsilon$ -presque-période de  $\check{h}(t)$ , vu que

$$\check{h}(t - \tau) - \check{h}(t) = h(-t + \tau) - h(-t)$$

<sup>1)</sup> Voir [1], IV — pag. 5.

<sup>2)</sup> Voir [1], pag. 10.

et

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\check{h}(t-\tau) - \check{h}(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|h(-t+\tau) - h(-t)\| < \varepsilon$$

En plus, si  $\{\tau\}_\varepsilon$  est un ensemble relativement dense de nombres réels, l'ensemble  $\{-\tau\}_\varepsilon$  est aussi relativement dense.

Par conséquent, si le groupe d'opérateurs  $G(t)$  est tel que  $G(t)x$  est presque-périodique pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , alors le groupe  $\check{G}(t) = G(-t)$  vérifie la même propriété.

On peut donc maintenant donner la

*Démonstration du Théorème 3.2.* En vue du Lemme 1 et de la presque-périodicité de la fonction  $G(t)u(o)$ , il nous reste à prouver que la fonction

$v(t) = \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma$  est presque-périodique. On voit immédiatement que l'ensemble  $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , vu que chaque élément de cet ensemble s'écrit sous la forme  $v(t) = u(t) - G(t)u(0)$ , les deux ensembles  $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  et  $\{G(t)u(0)\}_{t \in \mathbb{R}}$  étant aussi relativement compacts.

On a aussi

$$v(t) = G(t) \int_0^t G(-\sigma)f(\sigma) d\sigma$$

et donc

$$G(-t)v(t) = \int_0^t G(-\sigma)f(\sigma) d\sigma.$$

Maintenant, l'ensemble  $\{G(-t)v(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact, d'après le Lemme 2 et le Lemme 4.

D'autre part, la fonction  $G(-\sigma)f(\sigma)$  est presque-périodique (d'après les Lemmes 3 et 4); vu que l'ensemble  $\left\{ \int_0^t G(-\sigma)f(\sigma) d\sigma \right\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , on déduit, par un théorème de Bochner [2] (voir aussi [1], I — pag. 53, 57, 58, 59, et [5], Th. 6.19, pag. 161) la presque-périodicité de  $\int_0^t G(-\sigma)f(\sigma) d\sigma$ .

En appliquant de nouveau le Lemme 3, on trouve que  $\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma$  est presque-périodique, ce qui prouve le théorème.