Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1978)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Autor: Zaidman, S.

Kapitel: §4. Presque-périodicité des solutions faibles minimales

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49693

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 4. Presque-périodicité des solutions faibles minimales

Dans ce paragraphe relié au papier [11] [1]) on se restreint à un espace de Hilbert H; on considère un opérateur linéaire fermé A, de domaine dense dans H, étant le générateur infinitésimal d'un groupe $U(t)$ de transformations unitaires de H en soi-même; donc $U^*(t) = [U(t)]^{-1} = U(-t)$, pour $t \in \mathbf{R}$, et $\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} [U(\eta) x - x] = Ax$ si et seulement si $x \in \mathscr{D}(A)$. On sait que iA est alors un opérateur auto-adjoint, et on voit (cf. Th. 3.1) que pour toute solution $v(t)$ de l'équation $v'(t) = Av(t)$ on trouve $\| v(t) \|^2 = \text{const}$, $t \in \mathbf{R}$. On a vu aussi que si $f(t)$ est une fonction continue, et si $u(t)$ est une solution de l'équation $u'(t) = Au(t) + f(t)$, alors $u(t)$ admet la représentation intégrale

$$u(t) = U(t) u(0) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma, \; t \in \mathbf{R} .$$

D'après le § 4 Ch. I de [14] [2]) si $u(0) \in \mathscr{D}(A)$ et si $f(\sigma)$ est continûment différentiable, alors $u(t)$ est une solution de l'équation $u' = Au + f$; dans le cas général, nous disons que toute fonction $U(t) x + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$, où $x \in H$ et $f(\sigma)$ est continue dans H, est une solution faible de la même équation.

Définissons maintenant, pour toute fonction continue $f(t)$ de $\mathbf{R}$ dans H, l'ensemble Ω_f formé des solutions faibles $u(t)$ de l'équation $u'(t) = Au(t) + f(t)$, qui vérifient aussi la condition supplémentaire

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| u(t) \| = \mu(u) < \infty .$$

La fonctionnelle $v \to \mu(v) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| v(t) \|$ est donc bien définie sur l'ensemble Ω_f, et prend des valeurs finies $\geqslant 0$. On a alors le

Théorème 4.1. *Supposons que l'ensemble Ω_f ne soit pas vide. Il existe alors une solution faible $w(t)$ de l'équation $w' = Aw + f$, et une seule, ayant la propriété que $\mu(w) = \inf_{v \in \Omega_f} \mu(v) = \mu^*$.*

---

[1]) Il s'agit d'une version « abstraite » de ce travail.
[2]) Ou bien par le Th. 2.2.3 de [8].

Remarquons, avant de commencer la démonstration, que si Ω_f est un ensemble fini, l'existence d'une solution minimale est évidente, mais non l'unicité d'une telle solution.

Prouvons donc l'unicité des solutions minimales, en admettant leur existence.

Si $u_1(t)$, $u_2(t)$ étaient deux solutions minimales, on aurait $u_i(t) = U(t)\,u_i(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma$, $i = 1, 2$, et aussi $\mu(u_1) = \mu(u_2) = \mu^*$

Considérons alors les fonctions

$$\frac{1}{2}[u_1(t) - u_2(t)] = U(t)\left(\frac{u_1(0) - u_2(0)}{2}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)] = U(t)\left(\frac{u_1(0) + u_2(0)}{2}\right) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma\,.$$

On a que

$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\| = \frac{1}{2}\|u_1(0) - u_2(0)\|, \forall\, t \in \mathbf{R}\,,$$

et aussi

$$\frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)] \in \Omega_f\,,$$

et par suite

$$\mu^* \leqslant \mu\left(\frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)\right).$$

On applique maintenant l'identité du parallélogramme, valable dans tout espace de Hilbert

$$\frac{1}{4}\|h + k\|^2 + \frac{1}{4}\|h - k\|^2 = \frac{1}{2}(\|h\|^2 + \|k\|^2)\,,$$

en prenant, pour chaque t fixé, $h = u_1(t)$, $k = u_2(t)$. On obtient alors

$$\frac{1}{4}\|u_1(0) - u_2(0)\|^2 + \left\|\frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)]\right\|^2 = \frac{1}{2}[\|u_1(t)\|^2 + \|u_2(t)\|^2].$$

Mais, pour chaque t, $\|u_i(t)\| \leqslant \mu(u_i) = \mu^*$ et donc $\|u_i(t)\|^2 \leqslant (\mu^*)^2$, c'est-à-dire que

$$0 \leqslant \left\|\frac{u_1(t) + u_2(t)}{2}\right\|^2 \leqslant (\mu^*)^2 - \frac{1}{4}\|u_1(0) - u_2(0)\|^2 = \bar{\mu}^2 \text{ ou } \bar{\mu} < \mu^*$$

avec inégalité stricte, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Par conséquent, $\left\| \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \right\| \leqslant \bar{\mu}$, $t \in \mathbf{R}$ et donc $\mu\left(\frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t))\right)$ $\leqslant \bar{\mu} < \mu^*$, absurde, vu que on a $\mu^* \leqslant \mu\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right)$.

Démontrons maintenant l'existence d'une solution minimale, dans le cas de tout ensemble Ω_f non vide.

D'après la définition de μ^* comme borne inférieure exacte de $\mu(v)$ pour $v \in \Omega_f$, on trouve, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $u_\varepsilon \in \Omega_f$, telle que $\mu^* \leqslant \mu(u_\varepsilon) \leqslant \mu^* + \varepsilon$.

Prenons donc une suite $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, et une suite $(u_n)_1^\infty \subset \Omega_f$, de façon que

$$\mu^* \leqslant \mu(u_n) \leqslant \mu^* + \frac{1}{n} \leqslant \mu^* + 1, n = 1, 2, \ldots$$

On a alors $u_n(t) = U(t)\, u_n(0) + \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds$, et aussi le résultat suivant

LEMME. *La suite* $(u_n(0))_1^\infty$ *est de Cauchy dans* H.

En effet, si cela ne se vérifie pas, on peut trouver un nombre $\rho > 0$, et deux suites $(m_p)_1^\infty$, $(n_p)_1^\infty$, $m_p, n_p \geqslant p$, telles que on ait l'inégalité $\| u_{n_p}(0) - u_{m_p}(0) \| \geqslant \rho$, pour $p = 1, 2, \ldots$.
Nous appliquons de nouveau la règle du parallélogramme, comme plus haut, avec $h = u_{n_p}(t)$, $k = u_{m_p}(t)$, pour déduire que

$$\frac{1}{4} \| u_{n_p}(0) - u_{m_p}(0) \|^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_{m_p}(t) + u_{n_p}(t)] \right\|^2$$
$$= \frac{1}{2} [\| u_{m_p}(t) \|^2 + \| u_{n_p}(t) \|^2]$$

et donc aussi les inégalités

$$\frac{1}{4} \rho^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_{m_p}(t) + u_{n_p}(t)] \right\|^2 \leqslant \frac{1}{2} [\mu^2(u_{m_p}) + \mu^2(u_{n_p})]$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \left[(\mu^*)^2 + \frac{1}{n_p^2} + \frac{2}{n_p} \mu^* + (\mu^*)^2 + \frac{1}{m_p^2} + \frac{2}{m_p} \mu^* \right]$$
$$= (\mu^*)^2 + 0\left(\frac{1}{p}\right), p \to \infty .$$

Choisissons maintenant un nombre $\varepsilon > 0$ et assez petit; pour p assez grand on peut écrire alors

$$\left\| \frac{1}{2} [u_{n_p}(t) + u_{m_p}(t)] \right\|^2 \leqslant (\mu^*)^2 + \varepsilon - \frac{\rho^2}{4} = \mu_1^2 < (\mu^*)^2$$

$$\text{si} \quad \varepsilon < \frac{\rho^2}{4}, \ t \in \mathbf{R}.$$

On trouve donc $\mu\left(\frac{1}{2}(u_{n_p} + u_{m_p})\right) \leqslant \mu_1 < \mu^*$, absurde, vu que $\frac{1}{2}[u_{n_p} + u_{m_p}]$ appartient aussi à Ω_f.

Le lemme étant démontré, soit $x = \lim_{n \to \infty} u_n(0)$; posons $w(t) = U(t)x + \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds$.

Alors, $\| u_n(t) - w(t) \| = \| U(t)(u_n(0) - x) \| = \| u_n(0) - x \| \to 0$ si $n \to \infty$, et donc $w(t)$ est limite uniforme de la suite $(u_n(t))_1^\infty$.

Ecrivons alors $u_n(t) = u_n(t) - w(t) + w(t)$; on a $\| u_n(t) \| \leqslant \| u_n(t) - w(t) \| + \| w(t) \|$ et aussi $\mu(u_n) \leqslant \mu(u_n - w) + \mu(w)$.

Si $n \to \infty$, $\mu(u_n - v) \to 0$, et $\mu(u_n) \to \mu^*$. On en déduit $0 \leqslant \mu^* \leqslant \mu(w)$.

De la même façon on trouve que $\mu(w) \leqslant \mu^*$ et le Th. 4.1 est démontré.

Dans le reste de ce paragraphe, on se propose de prouver que si $w(t)$ est une solution faible minimale de l'équation $w' = Aw + f$, et si $f(t)$ est H-presque-périodique, alors $w(t)$ est aussi presque-périodique. Ce résultat sera une conséquence des théorèmes suivants:

THÉORÈME 4.2. *Soit $f(t)$ continue et presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans H et soit $w(t)$ une solution faible minimale, dans l'hypothèse que l'ensemble Ω_f n'est pas vide. Alors $w(t)$ est faiblement presque-périodique.*

THÉORÈME 4.3. *Soit $f(t)$ continue et presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans H et soit $v(t)$ une solution faible de l'équation $v' = Av + f$, qui est aussi faiblement presque-périodique.*
Alors, l'ensemble $\{v(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact, et $v(t)$ est donc presque-périodique.

Signalons aussi, un corollaire simple, qui est analogue au Th. 3.2 (on a ici un espace de Hilbert au lieu d'un Banach, mais le groupe $U(t)$ ne possède pas nécessairement la propriété de presque-périodicité forte).

THÉORÈME 4.4. *Soit* $f(t)$ *continue et H-presque-périodique, et soit* $v(t)$ *une solution faible de* $v' = Av + f$, *telle que l'ensemble* $\{v(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ *soit relativement compact dans* H. *Alors,* $v(t)$ *est presque-périodique.*

En effet, si $v(t)$ est une telle solution, $v(t)$ est bornée, donc l'ensemble Ω_f n'est pas vide. D'après les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3, on trouve une solution faible $w(t)$ qui est presque-périodique. Alors $v-w$ est une solution faible de $(v-w)' = A(v-w)$, et l'ensemble $\{v(t) - w(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ est relativement compact. Mais la relation

$$\| v(t) - w(t) \| = \| U(t)(v(0) - w(0)) \| = \| v(0) - w(0) \|, \; t \in \mathbf{R}$$

implique la presque-périodicité de $v(t) - w(t)$, comme dans le théorème 3.1. Par conséquent $v(t) = v(t) - w(t) + w(t)$ est aussi presque-périodique.

On commence maintenant la démonstration du Théorème 4.2. Soit donc $w(t) = U(t)\,w(0) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$, une solution faible minimale, avec $f(t)$ presque-périodique.

Prenons une suite arbitraire de réels $(h_n)_1^\infty$; il existe une sous-suite $(h_n^0)_1^\infty$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(t+h_n^0) = g(t)$ existe, uniformément pour $t \in \mathbf{R}$, où $g(t)$ est encore presque-périodique.

Aussi, l'ensemble $\{w(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ étant borné dans H, il existe une sous-suite de $(h_n^0)_1^\infty$, soit $(h_n^1)_1^\infty$, telle que la suite $\{w(h_n^1)\}_1^\infty$ soit faiblement convergente dans H, vers un élément w^*. Posons ensuite

$$w^*(t) = U(t)\,w^* + \int_0^t U(t-\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma\,.$$

On énonce maintenant le

LEMME 4.1. *La suite* $(w(t+h_n^1))_1^\infty$ *converge faiblement vers* $w^*(t)$, *uniformément sur chaque intervalle compact de* $\mathbf{R}$.

Démonstration. On a, pour tout a réel, l'égalité

$$w(t+a) = U(t+a)\,w(0) + \int_0^{t+a} U(t+a-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma\,;$$

si dans l'intégrale on effectue le changement de variable $\sigma = s + a$, on déduit la relation

$$w(t+a) = U(t)\,U(a)\,w(0) + \int_{-a}^t U(t-s) f(s+a)\, ds\,.$$

D'autre part, on a

$$w(a) = U(a)\, w(0) + \int_0^a U(a-s) f(s)\, ds$$

et donc

$$U(t)\, w(a) = U(t)\, U(a)\, w(0) + \int_0^a U(t-s+a) f(s)\, ds$$

$$= U(t)\, U(a)\, w(0) + \int_{-a}^0 U(t-\sigma) f(\sigma+a)\, d\sigma$$

et finalement

$$w(t+a) = U(t)\, w(a) + \int_0^t U(t-s) f(s+a)\, ds$$

On peut donc écrire la formule

$$w(t+h_n^1) = U(t)\, w(h_n^1) + \int_0^t U(t-s) f(s+h_n^1)\, ds\,.$$

Le premier terme à droite converge uniformément sur chaque intervalle compact de $\mathbf{R}$, dans H-faible, vers $U(t)\, w^*$. En effet, prenons un élément arbitraire $e \in H$; on a

$$\big(e,\, U(t)\, w(h_n^1)\big) = \big(U(-t)\, e,\, w(h_n^1)\big)$$

qui tend donc vers $\big(U(-t)\, e,\, w^*\big) = \big(e,\, U(t)\, w^*\big)$, pour chaque valeur fixée de t. Maintenant, cette convergence est uniforme si $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ où $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. En effet, l'ensemble $\{ U(-t)\, e \}_{\alpha \leq t \leq \beta}$ est compact dans H, vu que $U(-t)\, e$ est une fonction continue. On a aussi la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit une suite* $(x_n)_1^\infty \subset H$, *telle que* $(y, x_n) \to (y, x_0)$ *pour tout* $y \in H$. *Soit* $\mathscr{M}$ *un ensemble compact dans* H. *Alors,*

$\lim\limits_{n \to \infty} (y, x_n) = (y, x_0)$ *a lieu uniformément si* y *parcourt* $\mathscr{M}$.

Il faut donc prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$, tel que

$$|(y, x_n - x_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad y \in \mathscr{M}\,.$$

Soit $y_1, \ldots, y_p$ dans $\mathscr{M}$, tels que $\mathscr{M} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{S}(y_i, \varepsilon)$, ce qui est possible en vue de la compacité de $\mathscr{M}$.

Pour tout $i = 1, 2, \ldots p$, on trouve $N_i(\varepsilon)$, tel que $|(y_i, x_n - x_0)| < \varepsilon$ si $n \geqslant N_i(\varepsilon)$. Soit alors $N = \max(N_1, N_2, \ldots N_p)$. Pour $n \geqslant N$, on aura $|(y_i, x_n - x_0)| \leqslant \varepsilon$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots p$.

Maintenant on a aussi, $\forall\, y \in \mathscr{M}$, un certain y_j, tel que $\| y_j - y \| < \varepsilon$. Il en résulte donc

$$|(y, x_n - x_0)| \leqslant |(y - y_j, x_n - x_0)| + |(y_j, x_n - x_0)| \leqslant 2\varepsilon \sup_n \| x_n \| + \varepsilon$$

pour $n \geqslant N(\varepsilon)$; (la suite $(x_n)_1^\infty$ est bornée, étant faiblement convergente). Cela prouve la proposition.

Pour le deuxième terme à droite la convergence est même forte; en fait

$$\left\| \int_0^t U(t-s) f(s+h_n^1)\, ds - \int_0^t U(t-s)\, g(s)\, ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t U(t-s) [f(s+h_n^1) - g(s)]\, ds \right\| \leqslant \int_0^t \| f(s+h_n^1) - g(s) \|\, ds\,,$$

ce qui prouve le lemme 4.1.

Remarquons maintenant le fait suivant: on a

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| w(t) \| = \mu(w) = \mu^* = \inf_{v \in \Omega_f} \mu(v)\,.$$

Aussi, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et pour tout $e \in H$, on a que $(e, w^*(t)) = \lim_{n \to \infty} (e, w(t+h_n^1))$; mais $|(e, w(t+h_n^1))| \leqslant \| e \| \mu^*$, $n = 1, 2, \ldots$ donne aussi $|(e, w^*(t))| \leqslant \| e \| \mu^*$.

Il s'ensuit que $\| w^*(t) \| \leqslant \mu^*$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et donc $\mu(w^*) \leqslant \mu^*$. On a maintenant le

LEMME 4.2. *L'égalité* $\mu(w^*) = \mu^*$ *est valable.*

Supposons en effet l'inégalité stricte $\mu(w^*) < \mu^*$.
Prenons la formule de définition de $w^*(t)$, c'est-à-dire

$$w^*(t) = U(t)\, w^* + \int_0^t U(t-\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma$$

où $g(t)$ était définie comme $\lim_{n \to \infty} f(t+h_n^1)$, uniformément sur $\mathbf{R}$. Il en résulte alors, comme pour toute fonction presque-périodique, l'égalité $f(t) = \lim_{n \to \infty} g(t-h_n^1)$, encore uniformément sur $\mathbf{R}$.

En extrayant encore une sous-suite [1]), on trouve aussi que $w^*(h_n^1)$ est faiblement convergente vers un élément $Z \in H$.

---

[1]) Et sans changer de notation.

On trouve ensuite, comme auparavant, la relation

$$\lim_{n\to\infty} w^*(t-h_n^1) = U(t)Z + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma = Z(t),$$

la convergence étant toujours uniforme sur tout intervalle $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, dans H-faible. Maintenant, $Z(t)$ est dans Ω_f, et $\mu(Z) \leqslant \mu(w^*)$. Mais si $\mu(w^*) < \mu^*$, on a $\mu(Z) < \mu^*$, contredisant la définition de μ^*.
Cela prouve le Lemme.
On a enfin le

LEMME 4.3. *La solution faible* $w^*(t)$ *est minimale, c'est-à-dire que* $\mu(w^*) = \inf_{w\in\Omega_g} \mu(w)$.

En effet, si cela n'est pas vrai, et vu que Ω_g n'est pas vide, on trouve (Th. 4.1), une solution minimale unique, disons $\tilde{w}(t)$. On aurait donc

$$\mu(\tilde{w}) < \mu(w^*),$$

et

$$\tilde{w}(t) = U(t)\tilde{w}_0 + \int_0^t U(t-s)g(s)\,ds\,.$$

En procédant comme dans le Lemme 4.2, on trouverait une suite $(\tilde{h}_n)_1^\infty$ et une fonction $\tilde{X}(t)$ telles que
dans H-faible.

$$\tilde{X}(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{w}(t-\tilde{h}_n) = U(t)Z^* + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds,$$

De plus on aurait $\mu(\tilde{X}) \leqslant \mu(\tilde{w}) < \mu(w^*) = \mu^*$, et $\tilde{X} \in \Omega_f$, contradiction.
A ce point, nous pouvons passer à la

Démonstration du Théorème 4.2. Il suffira de prouver que la relation: $\lim_{n\to\infty} w(t+h_n^1) = w^*(t)$ dans H-faible, a lieu uniformément pour $t \in \mathbf{R}$.
Sinon, il existe au moins un élément $e_0 \in H$, tel que $\lim_{n\to\infty} (e_0, w(t+h_n^1)) = (e_0, w^*(t))$ ne soit pas uniforme sur $\mathbf{R}$.
Par conséquent, on trouve un nombre $\rho > 0$, deux suites d'entiers $(n_p)_1^\infty$, $(m_p)_1^\infty$ où $n_p, m_p \geqslant p$, et une suite $(t_p)_1^\infty$ de nombres réels, de façon que l'on ait l'inégalité

$$(*) \qquad \left|(e_0, w(t_p+h_{n_p}^1)) - (e_0, w(t_p+h_{m_p}^1))\right| \geqslant \rho, \ \forall p = 1, 2, \ldots$$

Après avoir effectué encore deux extractions de sous-suites, et sans changer nécessairement de notation, en utilisant le H-presque-périodicité de $f(t)$, on peut supposer qu'on a les limites

$$\lim_{p\to\infty} f(t+t_p+h^1_{n_p}) = g_1(t)$$

$$\lim_{p\to\infty} f(t+t_p+h^1_{m_p}) = g_2(t),$$

la convergence étant uniforme pour $t \in \mathbf{R}$.
Si l'on raisonne comme au début de la démonstration du Théorème 4.2, avec une autre extraction de sous-suites, on trouve que les successions $(w(t+t_p+h^1_{n_p})_1^\infty$ et $(w(t+t_p+h^1_{m_p})_1^\infty$ sont faiblement convergentes, uniformément sur chaque intervalle compact de $\mathbf{R}$ vers des fonctions

$$w_1^*(t) = U(t)\, w_1^* + \int_0^t U(t-\sigma)\, g_1(\sigma)\, d\sigma$$

et

$$w_2^*(t) = U(t)\, w_2^* + \int_0^t U(t-\sigma)\, g_2(\sigma)\, d\sigma$$

où $w_1^*(t)$, $w_2^*(t)$ sont des solutions faibles minimales dans Ω_{g_1} et Ω_{g_2} respectivement.
D'un autre côté, on peut prouver l'égalité $g_1(\sigma) = g_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$. En effet, $\lim_{n\to\infty} f(t+h^1_n)$ existe uniformément sur $\mathbf{R}$ et les suites $(h^1_{n_p})_1^\infty$, $(h^1_{m_p})_1^\infty$ sont extraites de $(h^1_n)_1^\infty$. On déduit que

$$\sup_{\tau\in\mathbf{R}} \left\| f(\tau+h^1_{n_p}) - f(\tau+h^1_{m_p}) \right\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad p \geqslant p_0(\varepsilon)$$

ce qui implique $g_1(\sigma) \equiv g_2(\sigma)$ vu que

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left\| f(t+t_p+h^1_{n_p}) - f(t+t_p+h^1_{m_p}) \right\| < \varepsilon,\ p \geqslant p_0(\varepsilon).$$

Ensuite, d'après l'unicité des solutions faibles minimales, on trouve que $w_1^*(t) = w_2^*(t)$, $t \in \mathbf{R}$, et en particulier, pour $t = 0$, $w_1^*(0) = w_2^*(0)$. Mais $w_1^*(0) = \lim\text{ faible}_{p\to\infty} w(t_p+h^1_{n_p})$, $w_2^*(0) = \lim\text{ faible}_{p\to\infty} w(t_p+h^1_{m_p})$, et l'égalité $w_1^*(0) = w_2^*(0)$ est en contradiction avec l'inégalité (*).
Cela achève la preuve du Théorème 4.2.

Nous passons maintenant à la preuve du Théorème 4.3.
Soit donc $f(t)$ une fonction continue presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans H,

et soit $v(t)$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans H admettant pour tout t réel une représentation

$$v(t) = U(t)v(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma .$$

D'après l'hypothèse $v(t)$ est aussi H-faiblement presque-périodique, et on veut démontrer que l'ensemble $\{ v(t) \}_{t\in\mathbf{R}} \subset H$ est relativement compact dans H.

En effet, dans le cas contraire, on trouve un nombre $\alpha > 0$ et une suite de nombres réels $\{ h_n \}_1^\infty$, telle que l'on ait

$$\| v(h_n) - v(h_m) \| > \alpha \quad \text{pour } n \neq m .$$

On peut aussi supposer, sans perdre la généralité, que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} f(t+h_n) = \tilde{f}(t)$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{R}$.

Comme dans le Lemme 4.1 on trouve la représentation

$$v(t+h_n) = U(t)v(h_n) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma+h_n)\,d\sigma .$$

Puisque la fonction $v(t)$ est faiblement presque-périodique, elle est bornée et on peut encore supposer, sans léser la généralité que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \text{(faible)}\ v(h_n) = w \in H .$$

On déduit alors (cf. Lemme 4.1)

$$\lim_{n\to\infty} \text{(faible)}\ v(t+h_n) = U(t)\,w + \int_0^t U(t-\sigma)\tilde{f}(\sigma)\,d\sigma$$

(cette limite a lieu uniformément pour t variant dans un intervalle compact de la droite réelle).

Posons maintenant $\tilde{v}(t) = U(t)\,w + \int_0^t U(t-\sigma)\tilde{f}(\sigma)\,d\sigma.$

Alors, $v(t)$ est faiblement presque-périodique et $\lim_{n\to\infty} \text{faible}\ v(t+h_n) = \tilde{v}(t)$.

D'après Amerio-Prouse ([1] Ch. III, 2, IV), cette convergence est uniforme sur $\mathbf{R}$, $\tilde{v}(t)$ est aussi faiblement presque-périodique et on a $\sup_{t\in\mathbf{R}} \| v(t) \| = \sup_{t\in\mathbf{R}} \| \tilde{v}(t) \|$.

D'autre part, on voit que

$$v(t+h_n) - v(t+h_m) = U(t)\big(v(h_n) - v(h_m)\big)$$
$$+ \int_0^t U(t-\sigma)\,[f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)]\,d\sigma$$

et par conséquent on obtient l'inégalité

$$\| v(t+h_n) - v(t+h_m) \| \geqslant \| U(t)\big(v(h_n) - v(h_m)\big) \|$$
$$- \left\| \int_0^t U(t-\sigma)\,[f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)]\,d\sigma \right\| \geqslant \| v(h_n) - v(h_m) \|$$
$$- \int_0^t \| f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m) \|\,d\sigma \quad (\text{vu que } \| U(\tau) \| = 1\,,\ \tau \in \mathbf{R})$$

Ecrivons maintenant la loi du parallélogramme dans les espaces de Hilbert; on trouve l'égalité

$$\left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) + v(t+h_n)\big) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) - v(t+h_n)\big) \right\|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\| v(t+h_m) \|^2 + \| v(t+h_n) \|^2 \right).$$

Si $M = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \| v(t) \|$, on voit que

$$\left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) + v(t+h_n)\big) \right\|^2 \leqslant M^2 - \frac{1}{4} \| v(t+h_m) - v(t+h_n) \|^2 .$$

Utilisons maintenant l'inégalité

$$\| v(t+h_m) - v(t+h_n) \| \geqslant \alpha - \int_0^t \| f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m) \|\,d\sigma\,,$$

en fixant une valeur de t; alors pour $n, m \geqslant N_t$, on obtient

$$\alpha - \int_0^t \| f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m) \|\,d\sigma > \frac{\alpha}{2}:$$

on en déduit la majoration

$$\left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) + v(t+h_n)\big) \right\|^2 \leqslant M^2 - \alpha^2/16 \quad \text{si} \quad m, n \geqslant N_t\,.$$

Maintenant, pour $Z \in H$ fixé, de norme unité, on a la limite

$$\left(Z, \frac{v(t+h_m) + v(t+h_n)}{2} \right) \to (Z, \tilde{v}(t)) \quad \text{quand} \quad m, n \to \infty\,.$$

On a aussi

$$\left| \left(Z, \frac{1}{2} \left(v(t+h_m) + v(t+h_n) \right) \right) \right| \leqslant \sqrt{M^2 - \alpha^2/16} \text{ si } m, n \geqslant N_t .$$

Donc

$$|(Z, \tilde{v}(t))| \leqslant \sqrt{M^2 - \alpha^2/16} ; \text{ (pour } t \text{ arbitraire et } \| Z \| = 1).$$

Donc

$$\| \tilde{v}(t) \| \leqslant \sqrt{M^2 - \alpha^2/16}, \ t \in \mathbf{R}$$

et cela contredit la relation $\sup_{t \in \mathrm{R}} \| \tilde{v}(t) \| = M$ établie précédemment.

Cela termine la preuve du Théorème 4.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amerio, L. and G. Prouse. *Almost-periodic functions and functional equations.* Van Nostrand Reinhold Co., 1971.

[2] Bochner, S. Abstrakte fast-periodische Funktionen. *Acta Math. 61* (1933), pp. 149-183.

[3] —— Fast-periodische Lösungen der Wellen-Gleichung. *Acta Math. 62* (1934).

[4] Cooke, R. Almost-periodicity of bounded and compact solutions of differential equations. *Duke Math. J. 36* (1969), pp. 273-276.

[5] Corduneanu, C. *Almost-periodic functions.* Interscience Publishers, 1968.

[6] Perov, A. I. and Ta Kuang Hai. On almost-periodic solutions of homogeneous differential equations. *Diferentzalnie Uravnenia 8* (1972), pp. 453-458.

[7] Hille, E. and R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A. M. S. Colloquium publications, vol. 31, 1957.

[8] Ladas, G. and V. Lakshmikantham. *Abstract differential equations.* Academic Press, 1972.

[9] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, 1965.

[10] Zaidman, S. Sur la perturbation presque-périodique des groupes et semi-groupes de transformations d'un espace de Banach. *Rend. Matem. e sue Appl., S. V., 16* (1957), pp. 197-206.

[11] —— Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes (I, II). *Rend. Acc. Naz. Lincei 30,* mai-juin 1961.

[12] —— Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques, *Annales Ecole Normale Supérieure Paris 79* (1962), pp. 151-198.

[13] —— Teoremi di quasi-periodicità per alcune equazioni differenzali operazionali. *Rend. Sem. Mat. Fisico di Milano 33* (1963).

[14] —— *Equations différentielles abstraites.* Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.

(Reçu le 2 août 1977)

S. Zaidman

Département de Mathématique
Université de Montréal
Canada