§4. Presque-périodicité des solutions faibles minimales

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

§ 4. Presque-périodicité des solutions faibles minimales

Dans ce paragraphe relié au papier [11] [1]) on se restreint à un espace de Hilbert H; on considère un opérateur linéaire fermé A, de domaine dense dans H, étant le générateur infinitésimal d'un groupe $U(t)$ de transformations unitaires de H en soi-même; donc $U^*(t) = [U(t)]^{-1} = U(-t)$, pour $t \in \mathbf{R}$, et $\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} [U(\eta) x - x] = Ax$ si et seulement si $x \in \mathscr{D}(A)$. On sait que iA est alors un opérateur auto-adjoint, et on voit (cf. Th. 3.1) que pour toute solution $v(t)$ de l'équation $v'(t) = Av(t)$ on trouve $\| v(t) \|^2 = \text{const}$, $t \in \mathbf{R}$. On a vu aussi que si $f(t)$ est une fonction continue, et si $u(t)$ est une solution de l'équation $u'(t) = Au(t) + f(t)$, alors $u(t)$ admet la représentation intégrale

$$u(t) = U(t) u(0) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma) \, d\sigma, \; t \in \mathbf{R} .$$

D'après le § 4 Ch. I de [14] [2]) si $u(0) \in \mathscr{D}(A)$ et si $f(\sigma)$ est continûment différentiable, alors $u(t)$ est une solution de l'équation $u' = Au + f$; dans le cas général, nous disons que toute fonction $U(t) x + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma) \, d\sigma$, où $x \in H$ et $f(\sigma)$ est continue dans H, est une solution faible de la même équation.

Définissons maintenant, pour toute fonction continue $f(t)$ de $\mathbf{R}$ dans H, l'ensemble Ω_f formé des solutions faibles $u(t)$ de l'équation $u'(t) = Au(t) + f(t)$, qui vérifient aussi la condition supplémentaire

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| u(t) \| = \mu(u) < \infty .$$

La fonctionnelle $v \to \mu(v) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| v(t) \|$ est donc bien définie sur l'ensemble Ω_f, et prend des valeurs finies $\geqslant 0$. On a alors le

Théorème 4.1. *Supposons que l'ensemble Ω_f ne soit pas vide. Il existe alors une solution faible $w(t)$ de l'équation $w' = Aw + f$, et une seule, ayant la propriété que $\mu(w) = \inf_{v \in \Omega_f} \mu(v) = \mu^*$.*

---

[1]) Il s'agit d'une version « abstraite » de ce travail.

[2]) Ou bien par le Th. 2.2.3 de [8].

Remarquons, avant de commencer la démonstration, que si Ω_f est un ensemble fini, l'existence d'une solution minimale est évidente, mais non l'unicité d'une telle solution.

Prouvons donc l'unicité des solutions minimales, en admettant leur existence.

Si $u_1(t)$, $u_2(t)$ étaient deux solutions minimales, on aurait $u_i(t) = U(t)\, u_i(0) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$, $i = 1, 2$, et aussi $\mu(u_1) = \mu(u_2) = \mu^*$

Considérons alors les fonctions

$$\frac{1}{2}[u_1(t) - u_2(t)] = U(t)\left(\frac{u_1(0) - u_2(0)}{2}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)] = U(t)\left(\frac{u_1(0) + u_2(0)}{2}\right) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma .$$

On a que

$$\frac{1}{2}\| u_1(t) - u_2(t) \| = \frac{1}{2}\| u_1(0) - u_2(0) \|, \forall\, t \in \mathbf{R},$$

et aussi

$$\frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)] \in \Omega_f ,$$

et par suite

$$\mu^* \leqslant \mu\left(\frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)\right).$$

On applique maintenant l'identité du parallélogramme, valable dans tout espace de Hilbert

$$\frac{1}{4}\| h + k \|^2 + \frac{1}{4}\| h - k \|^2 = \frac{1}{2}(\| h \|^2 + \| k \|^2),$$

en prenant, pour chaque t fixé, $h = u_1(t)$, $k = u_2(t)$. On obtient alors $\frac{1}{4}\| u_1(0) - u_2(0) \|^2 + \left\| \frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)] \right\|^2 = \frac{1}{2}[\| u_1(t) \|^2 + \| u_2(t) \|^2]$.
Mais, pour chaque t, $\| u_i(t) \| \leqslant \mu(u_i) = \mu^*$ et donc $\| u_i(t) \|^2 \leqslant (\mu^*)^2$, c'est-à-dire que

$$0 \leqslant \left\| \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \right\|^2 \leqslant (\mu^*)^2 - \frac{1}{4}\| u_1(0) - u_2(0) \|^2 = \bar{\mu}^2 \text{ ou } \bar{\mu} < \mu^*$$

avec inégalité stricte, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Par conséquent, $\left\| \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \right\| \leqslant \bar{\mu}$, $t \in \mathbf{R}$ et donc $\mu \left(\frac{1}{2} (u_1(t) + u_2(t)) \right)$ $\leqslant \bar{\mu} < \mu^*$, absurde, vu que on a $\mu^* \leqslant \mu \left(\frac{1}{2} (u_1 + u_2) \right)$.

Démontrons maintenant l'existence d'une solution minimale, dans le cas de tout ensemble Ω_f non vide.

D'après la définition de μ^* comme borne inférieure exacte de $\mu(v)$ pour $v \in \Omega_f$, on trouve, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $u_\varepsilon \in \Omega_f$, telle que $\mu^* \leqslant \mu(u_\varepsilon) \leqslant \mu^* + \varepsilon$.

Prenons donc une suite $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, et une suite $(u_n)_1^\infty \subset \Omega_f$, de façon que $\mu^* \leqslant \mu(u_n) \leqslant \mu^* + \frac{1}{n} \leqslant \mu^* + 1, n = 1, 2, \ldots$

On a alors $u_n(t) = U(t) u_n(0) + \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds$, et aussi le résultat suivant

Lemme. *La suite* $(u_n(0))_1^\infty$ *est de Cauchy dans* H.

En effet, si cela ne se vérifie pas, on peut trouver un nombre $\rho > 0$, et deux suites $(m_p)_1^\infty$, $(n_p)_1^\infty$, $m_p, n_p \geqslant p$, telles que on ait l'inégalité $\| u_{n_p}(0) - u_{m_p}(0) \| \geqslant \rho$, pour $p = 1, 2, \ldots$.
Nous appliquons de nouveau la règle du parallélogramme, comme plus haut, avec $h = u_{n_p}(t)$, $k = u_{m_p}(t)$, pour déduire que

$$\frac{1}{4} \| u_{n_p}(0) - u_{m_p}(0) \|^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_{m_p}(t) + u_{n_p}(t)] \right\|^2 = \frac{1}{2} [\| u_{m_p}(t) \|^2 + \| u_{n_p}(t) \|^2]$$

et donc aussi les inégalités

$$\frac{1}{4} \rho^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_{m_p}(t) + u_{n_p}(t)] \right\|^2 \leqslant \frac{1}{2} [\mu^2(u_{m_p}) + \mu^2(u_{n_p})]$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \left[(\mu^*)^2 + \frac{1}{n_p^2} + \frac{2}{n_p} \mu^* + (\mu^*)^2 + \frac{1}{m_p^2} + \frac{2}{m_p} \mu^* \right]$$
$$= (\mu^*)^2 + 0 \left(\frac{1}{p} \right), \, p \to \infty \, .$$

Choisissons maintenant un nombre $\varepsilon > 0$ et assez petit; pour p assez grand on peut écrire alors

$$\left\| \frac{1}{2} [u_{n_p}(t) + u_{m_p}(t)] \right\|^2 \leqslant (\mu^*)^2 + \varepsilon - \frac{\rho^2}{4} = \mu_1^2 < (\mu^*)^2$$

$$\text{si} \quad \varepsilon < \frac{\rho^2}{4}, \; t \in \mathbf{R} .$$

On trouve donc $\mu \left(\frac{1}{2} (u_{n_p} + u_{m_p}) \right) \leqslant \mu_1 < \mu^*$, absurde, vu que $\frac{1}{2} [u_{n_p} + u_{m_p}]$ appartient aussi à Ω_f.

Le lemme étant démontré, soit $x = \lim\limits_{n \to \infty} u_n (0)$; posons $w (t) = U (t) x + \int_0^t U (t-s) f(s) \, ds$.

Alors, $\| u_n (t) - w (t) \| = \| U (t) (u_n (0) - x) \| = \| u_n (0) - x \| \to 0$ si $n \to \infty$, et donc $w (t)$ est limite uniforme de la suite $(u_n (t))_1^\infty$.

Ecrivons alors $u_n (t) = u_n (t) - w (t) + w (t)$; on a $\| u_n (t) \| \leqslant \| u_n (t) - w (t) \| + \| w (t) \|$ et aussi $\mu (u_n) \leqslant \mu (u_n - w) + \mu (w)$.

Si $n \to \infty$, $\mu (u_n - v) \to 0$, et $\mu (u_n) \to \mu^*$. On en déduit $0 \leqslant \mu^* \leqslant \mu (w)$. De la même façon on trouve que $\mu (w) \leqslant \mu^*$ et le Th. 4.1 est démontré.

Dans le reste de ce paragraphe, on se propose de prouver que si $w (t)$ est une solution faible minimale de l'équation $w' = Aw + f$, et si $f (t)$ est H-presque-périodique, alors $w (t)$ est aussi presque-périodique. Ce résultat sera une conséquence des théorèmes suivants:

THÉORÈME 4.2. *Soit $f (t)$ continue et presque-périodique de* $\mathbf{R}$ *dans H et soit $w (t)$ une solution faible minimale, dans l'hypothèse que l'ensemble Ω_f n'est pas vide. Alors $w (t)$ est faiblement presque-périodique.*

THÉORÈME 4.3. *Soit $f (t)$ continue et presque-périodique de* $\mathbf{R}$ *dans H et soit $v (t)$ une solution faible de l'équation $v' = Av + f$, qui est aussi faiblement presque-périodique.*
Alors, l'ensemble $\{ v (t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact, et $v (t)$ est donc presque-périodique.

Signalons aussi, un corollaire simple, qui est analogue au Th. 3.2 (on a ici un espace de Hilbert au lieu d'un Banach, mais le groupe $U (t)$ ne possède pas nécessairement la propriété de presque-périodicité forte).

THÉORÈME 4.4. *Soit* $f(t)$ *continue et H-presque-périodique, et soit* $v(t)$ *une solution faible de* $v' = Av + f$, *telle que l'ensemble* $\{v(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ *soit relativement compact dans* H. *Alors,* $v(t)$ *est presque-périodique.*

En effet, si $v(t)$ est une telle solution, $v(t)$ est bornée, donc l'ensemble Ω_f n'est pas vide. D'après les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3, on trouve une solution faible $w(t)$ qui est presque-périodique. Alors $v-w$ est une solution faible de $(v-w)' = A(v-w)$, et l'ensemble $\{v(t) - w(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact. Mais la relation

$$\|v(t) - w(t)\| = \|U(t)(v(0) - w(0))\| = \|v(0) - w(0)\|, \ t \in \mathbf{R}$$

implique la presque-périodicité de $v(t) - w(t)$, comme dans le théorème 3.1. Par conséquent $v(t) = v(t) - w(t) + w(t)$ est aussi presque-périodique.

On commence maintenant la démonstration du Théorème 4.2. Soit donc $w(t) = U(t)\,w(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma$, une solution faible minimale, avec $f(t)$ presque-périodique.

Prenons une suite arbitraire de réels $(h_n)_1^\infty$; il existe une sous-suite $(h_n^0)_1^\infty$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(t+h_n^0) = g(t)$ existe, uniformément pour $t \in \mathbf{R}$, où $g(t)$ est encore presque-périodique.

Aussi, l'ensemble $\{w(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ étant borné dans H, il existe une sous-suite de $(h_n^0)_1^\infty$, soit $(h_n^1)_1^\infty$, telle que la suite $\{w(h_n^1)\}_1^\infty$ soit faiblement convergente dans H, vers un élément w^*. Posons ensuite

$$w^*(t) = U(t)\,w^* + \int_0^t U(t-\sigma)\,g(\sigma)\,d\sigma .$$

On énonce maintenant le

LEMME 4.1. *La suite* $(w(t+h_n^1))_1^\infty$ *converge faiblement vers* $w^*(t)$, *uniformément sur chaque intervalle compact de* $\mathbf{R}$.

Démonstration. On a, pour tout a réel, l'égalité

$$w(t+a) = U(t+a)\,w(0) + \int_0^{t+a} U(t+a-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma ;$$

si dans l'intégrale on effectue le changement de variable $\sigma = s + a$, on déduit la relation

$$w(t+a) = U(t)\,U(a)\,w(0) + \int_{-a}^{t} U(t-s)f(s+a)\,ds .$$

D'autre part, on a

$$w(a) = U(a)\,w(0) + \int_0^a U(a-s)\,f(s)\,ds$$

et donc

$$U(t)\,w(a) = U(t)\,U(a)\,w(0) + \int_0^a U(t-s+a)\,f(s)\,ds$$

$$= U(t)\,U(a)\,w(0) + \int_{-a}^0 U(t-\sigma)\,f(\sigma+a)\,d\sigma$$

et finalement

$$w(t+a) = U(t)\,w(a) + \int_0^t U(t-s)\,f(s+a)\,ds$$

On peut donc écrire la formule

$$w(t+h_n^1) = U(t)\,w(h_n^1) + \int_0^t U(t-s)\,f(s+h_n^1)\,ds\,.$$

Le premier terme à droite converge uniformément sur chaque intervalle compact de **R**, dans H-faible, vers $U(t)\,w^*$. En effet, prenons un élément arbitraire $e \in H$; on a

$$\big(e,\,U(t)\,w(h_n^1)\big) = \big(U(-t)\,e,\,w(h_n^1)\big)$$

qui tend donc vers $\big(U(-t)\,e,\,w^*\big) = \big(e,\,U(t)\,w^*\big)$, pour chaque valeur fixée de t. Maintenant, cette convergence est uniforme si $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ où $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. En effet, l'ensemble $\{\,U(-t)\,e\,\}_{\alpha \leq t \leq \beta}$ est compact dans H, vu que $U(-t)\,e$ est une fonction continue. On a aussi la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit une suite* $(x_n)_1^\infty \subset H$, *telle que* $(y, x_n) \to (y, x_0)$ *pour tout* $y \in H$. *Soit* $\mathcal{M}$ *un ensemble compact dans* H. *Alors,* $\lim\limits_{n\to\infty} (y, x_n) = (y, x_0)$ *a lieu uniformément si* y *parcourt* $\mathcal{M}$.

Il faut donc prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$, tel que

$$|(y, x_n - x_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{M}\,.$$

Soit $y_1, \ldots, y_p$ dans $\mathcal{M}$, tels que $\mathcal{M} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{S}(y_i, \varepsilon)$, ce qui est possible en vue de la compacité de $\mathcal{M}$.

Pour tout $i = 1, 2, \ldots p$, on trouve $N_i(\varepsilon)$, tel que $|(y_i, x_n - x_0)| < \varepsilon$ si $n \geqslant N_i(\varepsilon)$. Soit alors $N = \max(N_1, N_2, \ldots N_p)$. Pour $n \geqslant N$, on aura $|(y_i, x_n - x_0)| \leqslant \varepsilon$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots p$.

Maintenant on a aussi, $\forall\, y \in \mathcal{M}$, un certain y_j, tel que $\| y_j - y \| < \varepsilon$. Il en résulte donc

$$|(y, x_n - x_0)| \leqslant |(y - y_j, x_n - x_0)| + |(y_j, x_n - x_0)| \leqslant 2\varepsilon \sup_n \| x_n \| + \varepsilon$$

pour $n \geqslant N(\varepsilon)$; (la suite $(x_n)_1^\infty$ est bornée, étant faiblement convergente). Cela prouve la proposition.

Pour le deuxième terme à droite la convergence est même forte; en fait

$$\left\| \int_0^t U(t-s) f(s+h_n^1)\, ds - \int_0^t U(t-s)\, g(s)\, ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t U(t-s) [f(s+h_n^1) - g(s)]\, ds \right\| \leqslant \int_0^t \| f(s+h_n^1) - g(s) \|\, ds\,,$$

ce qui prouve le lemme 4.1.

Remarquons maintenant le fait suivant: on a

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| w(t) \| = \mu(w) = \mu^* = \inf_{v \in \Omega f} \mu(v)\,.$$

Aussi, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et pour tout $e \in H$, on a que $(e, w^*(t)) = \lim_{n \to \infty} (e, w(t+h_n^1))$; mais $|(e, w(t+h_n^1))| \leqslant \| e \| \mu^*$, $n = 1, 2, \ldots$ donne aussi $|(e, w^*(t))| \leqslant \| e \| \mu^*$.

Il s'ensuit que $\| w^*(t) \| \leqslant \mu^*$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et donc $\mu(w^*) \leqslant \mu^*$. On a maintenant le

Lemme 4.2. *L'égalité* $\mu(w^*) = \mu^*$ *est valable.*

Supposons en effet l'inégalité stricte $\mu(w^*) < \mu^*$.
Prenons la formule de définition de $w^*(t)$, c'est-à-dire

$$w^*(t) = U(t)\, w^* + \int_0^t U(t-\sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma$$

où $g(t)$ était définie comme $\lim_{n \to \infty} f(t+h_n^1)$, uniformément sur $\mathbf{R}$. Il en résulte alors, comme pour toute fonction presque-périodique, l'égalité $f(t) = \lim_{n \to \infty} g(t-h_n^1)$, encore uniformément sur $\mathbf{R}$.

En extrayant encore une sous-suite [1]), on trouve aussi que $w^*(h_n^1)$ est faiblement convergente vers un élément $Z \in H$.

[1]) Et sans changer de notation.

On trouve ensuite, comme auparavant, la relation

$$\lim_{n\to\infty} w^*(t-h_n^1) = U(t)Z + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma = Z(t),$$

la convergence étant toujours uniforme sur tout intervalle $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, dans H-faible. Maintenant, $Z(t)$ est dans Ω_f, et $\mu(Z) \leqslant \mu(w^*)$. Mais si $\mu(w^*) < \mu^*$, on a $\mu(Z) < \mu^*$, contredisant la définition de μ^*.
Cela prouve le Lemme.
On a enfin le

LEMME 4.3. *La solution faible* $w^*(t)$ *est minimale, c'est-à-dire que* $\mu(w^*) = \inf\limits_{w\in\Omega_g} \mu(w)$.

En effet, si cela n'est pas vrai, et vu que Ω_g n'est pas vide, on trouve (Th. 4.1), une solution minimale unique, disons $\tilde{w}(t)$. On aurait donc

$$\mu(\tilde{w}) < \mu(w^*),$$

et

$$\tilde{w}(t) = U(t)\tilde{w}_0 + \int_0^t U(t-s)g(s)\,ds.$$

En procédant comme dans le Lemme 4.2, on trouverait une suite $(\tilde{h}_n)_1^\infty$ et une fonction $\tilde{X}(t)$ telles que
dans H-faible.

$$\tilde{X}(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{w}(t-\tilde{h}_n) = U(t)Z^* + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds,$$

De plus on aurait $\mu(\tilde{X}) \leqslant \mu(\tilde{w}) < \mu(w^*) = \mu^*$, et $\tilde{X}\in\Omega_f$, contradiction.
A ce point, nous pouvons passer à la

Démonstration du Théorème 4.2. Il suffira de prouver que la relation: $\lim\limits_{n\to\infty} w(t+h_n^1) = w^*(t)$ dans H-faible, a lieu uniformément pour $t\in\mathbf{R}$.
Sinon, il existe au moins un élément $e_0\in H$, tel que $\lim\limits_{n\to\infty}\big(e_0, w(t+h_n^1)\big) = \big(e_0, w^*(t)\big)$ ne soit pas uniforme sur $\mathbf{R}$.
Par conséquent, on trouve un nombre $\rho > 0$, deux suites d'entiers $(n_p)_1^\infty$, $(m_p)_1^\infty$ où $n_p, m_p \geqslant p$, et une suite $(t_p)_1^\infty$ de nombres réels, de façon que l'on ait l'inégalité

$$(*) \qquad \left|\big(e_0, w(t_p+h_{n_p}^1)\big) - \big(e_0, w(t_p+h_{m_p}^1)\big)\right| \geqslant \rho, \ \forall\, p = 1, 2, \ldots$$

Après avoir effectué encore deux extractions de sous-suites, et sans changer nécessairement de notation, en utilisant le H-presque-périodicité de $f(t)$, on peut supposer qu'on a les limites

$$\lim_{p\to\infty} f(t+t_p+h^1_{n_p}) = g_1(t)$$

$$\lim_{p\to\infty} f(t+t_p+h^1_{m_p}) = g_2(t),$$

la convergence étant uniforme pour $t \in \mathbf{R}$.

Si l'on raisonne comme au début de la démonstration du Théorème 4.2, avec une autre extraction de sous-suites, on trouve que les successions $(w(t+t_p+h^1_{n_p}))_1^\infty$ et $(w(t+t_p+h^1_{m_p}))_1^\infty$ sont faiblement convergentes, uniformément sur chaque intervalle compact de $\mathbf{R}$ vers des fonctions

$$w_1^*(t) = U(t)\,w_1^* + \int_0^t U(t-\sigma)\,g_1(\sigma)\,d\sigma$$

et

$$w_2^*(t) = U(t)\,w_2^* + \int_0^t U(t-\sigma)\,g_2(\sigma)\,d\sigma$$

où $w_1^*(t)$, $w_2^*(t)$ sont des solutions faibles minimales dans Ω_{g_1} et Ω_{g_2} respectivement.

D'un autre côté, on peut prouver l'égalité $g_1(\sigma) = g_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$. En effet, $\lim\limits_{n\to\infty} f(t+h^1_n)$ existe uniformément sur $\mathbf{R}$ et les suites $(h^1_{n_p})_1^\infty$, $(h^1_{m_p})_1^\infty$ sont extraites de $(h^1_n)_1^\infty$. On déduit que

$$\sup_{\tau\in\mathbf{R}} \left\| f(\tau+h^1_{n_p}) - f(\tau+h^1_{m_p}) \right\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad p \geqslant p_0(\varepsilon)$$

ce qui implique $g_1(\sigma) \equiv g_2(\sigma)$ vu que

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left\| f(t+t_p+h^1_{n_p}) - f(t+t_p+h^1_{m_p}) \right\| < \varepsilon, \; p \geqslant p_0(\varepsilon).$$

Ensuite, d'après l'unicité des solutions faibles minimales, on trouve que $w_1^*(t) = w_2^*(t)$, $t \in \mathbf{R}$, et en particulier, pour $t = 0$, $w_1^*(0) = w_2^*(0)$. Mais $w_1^*(0) = \lim\limits_{p\to\infty}$ faible $w(t_p+h^1_{n_p})$, $w_2^*(0) = \lim\limits_{p\to\infty}$ faible $w(t_p+h^1_{m_p})$, et l'égalité $w_1^*(0) = w_2^*(0)$ est en contradiction avec l'inégalité (*).

Cela achève la preuve du Théorème 4.2.

Nous passons maintenant à la preuve du Théorème 4.3.

Soit donc $f(t)$ une fonction continue presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans H, et soit $v(t)$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans H admettant pour tout t réel une représentation

$$v(t) = U(t)v(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma .$$

D'après l'hypothèse $v(t)$ est aussi H-faiblement presque-périodique, et on veut démontrer que l'ensemble $\{ v(t) \}_{t \in \mathbf{R}} \subset H$ est relativement compact dans H.

En effet, dans le cas contraire, on trouve un nombre $\alpha > 0$ et une suite de nombres réels $\{ h_n \}_1^\infty$, telle que l'on ait

$$\| v(h_n) - v(h_m) \| > \alpha \text{ pour } n \neq m .$$

On peut aussi supposer, sans perdre la généralité, que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} f(t+h_n) = \tilde{f}(t)$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{R}$.

Comme dans le Lemme 4.1 on trouve la représentation

$$v(t+h_n) = U(t)v(h_n) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma+h_n)\,d\sigma .$$

Puisque la fonction $v(t)$ est faiblement presque-périodique, elle est bornée et on peut encore supposer, sans léser la généralité que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} (\text{faible})\ v(h_n) = w \in H .$$

On déduit alors (cf. Lemme 4.1)

$$\lim_{n \to \infty} (\text{faible})\ v(t+h_n) = U(t)\,w + \int_0^t U(t-\sigma)\tilde{f}(\sigma)\,d\sigma$$

(cette limite a lieu uniformément pour t variant dans un intervalle compact de la droite réelle).

Posons maintenant $\tilde{v}(t) = U(t)\,w + \int_0^t U(t-\sigma)\tilde{f}(\sigma)\,d\sigma$.

Alors, $v(t)$ est faiblement presque-périodique et $\lim\limits_{n \to \infty}$ faible $v(t+h_n) = \tilde{v}(t)$.

D'après Amerio-Prouse ([1] Ch. III, 2, IV), cette convergence est uniforme sur $\mathbf{R}$, $\tilde{v}(t)$ est aussi faiblement presque-périodique et on a $\sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \| v(t) \| = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \| \tilde{v}(t) \|$.

D'autre part, on voit que

$$v(t+h_n) - v(t+h_m) = U(t)\big(v(h_n) - v(h_m)\big)$$
$$+ \int_0^t U(t-\sigma)\left[f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)\right] d\sigma$$

et par conséquent on obtient l'inégalité

$$\| v(t+h_n) - v(t+h_m) \| \geqslant \| U(t)\big(v(h_n) - v(h_m)\big) \|$$
$$- \left\| \int_0^t U(t-\sigma)\left[f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)\right] d\sigma \right\| \geqslant \| v(h_n) - v(h_m) \|$$
$$- \int_0^t \| f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m) \| \, d\sigma \quad (\text{vu que } \| U(\tau) \| = 1 \,, \ \tau \in \mathbf{R})$$

Ecrivons maintenant la loi du parallélogramme dans les espaces de Hilbert; on trouve l'égalité

$$\left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) + v(t+h_n)\big) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) - v(t+h_n)\big) \right\|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\| v(t+h_m) \|^2 + \| v(t+h_n) \|^2 \right).$$

Si $M = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \| v(t) \|$, on voit que

$$\left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) + v(t+h_n)\big) \right\|^2 \leqslant M^2 - \frac{1}{4} \| v(t+h_m) - v(t+h_n) \|^2 .$$

Utilisons maintenant l'inégalité

$$\| v(t+h_m) - v(t+h_n) \| \geqslant \alpha - \int_0^t \| f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m) \| \, d\sigma \,,$$

en fixant une valeur de t; alors pour $n, m \geqslant N_t$, on obtient

$$\alpha - \int_0^t \| f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m) \| \, d\sigma > \frac{\alpha}{2} ;$$

on en déduit la majoration

$$\left\| \frac{1}{2}\big(v(t+h_m) + v(t+h_n)\big) \right\|^2 \leqslant M^2 - \alpha^2/16 \quad \text{si} \quad m, n \geqslant N_t .$$

Maintenant, pour $Z \in H$ fixé, de norme unité, on a la limite

$$\left(Z, \frac{v(t+h_m) + v(t+h_n)}{2} \right) \to (Z, \tilde{v}(t)) \quad \text{quand} \quad m, n \to \infty .$$

On a aussi

$$\left|\left(Z, \frac{1}{2}(v(t+h_m) + v(t+h_n)\right)\right| \leqslant \sqrt{M^2 - \alpha^2/16} \text{ si } m, n \geqslant N_t .$$

Donc

$$|(Z, \tilde{v}(t))| \leqslant \sqrt{M^2 - \alpha^2/16} ; \text{ (pour } t \text{ arbitraire et } \| Z \| = 1).$$

Donc

$$\|\tilde{v}(t)\| \leqslant \sqrt{M^2 - \alpha^2/16}, \ t \in \mathbf{R}$$

et cela contredit la relation $\sup_{t \in \mathbf{R}} \| \tilde{v}(t) \| = M$ établie précédemment.

Cela termine la preuve du Théorème 4.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amerio, L. and G. Prouse. *Almost-periodic functions and functional equations.* Van Nostrand Reinhold Co., 1971.

[2] Bochner, S. Abstrakte fast-periodische Funktionen. *Acta Math. 61* (1933), pp. 149-183.

[3] —— Fast-periodische Lösungen der Wellen-Gleichung. *Acta Math. 62* (1934).

[4] Cooke, R. Almost-periodicity of bounded and compact solutions of differential equations. *Duke Math. J. 36* (1969), pp. 273-276.

[5] Corduneanu, C. *Almost-periodic functions.* Interscience Publishers, 1968.

[6] Perov, A. I. and Ta Kuang Hai. On almost-periodic solutions of homogeneous differential equations. *Diferentzalnie Uravnenia 8* (1972), pp. 453-458.

[7] Hille, E. and R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A. M. S. Colloquium publications, vol. 31, 1957.

[8] Ladas, G. and V. Lakshmikantham. *Abstract differential equations.* Academic Press, 1972.

[9] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, 1965.

[10] Zaidman, S. Sur la perturbation presque-périodique des groupes et semi-groupes de transformations d'un espace de Banach. *Rend. Matem. e sue Appl., S. V., 16* (1957), pp. 197-206.

[11] —— Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes (I, II). *Rend. Acc. Naz. Lincei 30,* mai-juin 1961.

[12] —— Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques, *Annales Ecole Normale Supérieure Paris 79* (1962), pp. 151-198.

[13] —— Teoremi di quasi-periodicità per alcune equazioni differenzali operazionali. *Rend. Sem. Mat. Fisico di Milano 33* (1963).

[14] —— *Equations différentielles abstraites.* Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.

(Reçu le 2 août 1977)

S. Zaidman

Département de Mathématique
Université de Montréal
Canada