

§1. Présentations dynamiques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS ¹

par J. C. HAUSMANN et M. KERVAIRE

Rappelons la caractérisation algébrique des groupes de nœuds en grandes dimensions. Soient π un groupe et d un entier supérieur ou égal à 3. D'après [K], il existe un nœud différentiable $k: S^d \rightarrow S^{d+2}$ avec

$$\pi \cong \pi_1(S^{d+2} - k(S^d))$$

si et seulement si

- (1) π est de présentation finie;
- (2) π est clôture normale d'un de ses éléments;
- (3) $H_1(\pi) = \mathbf{Z}$ et $H_2(\pi) = 0$.

Dans cette note nous étudions les groupes qui possèdent ces propriétés et nous donnons une caractérisation de leur groupe dérivé $[\pi, \pi]$.

La principale difficulté est d'élucider la condition de finitude imposée à $G = [\pi, \pi]$ par l'existence d'une présentation finie de π .

Ce problème est résolu à l'aide de la notion de *présentation dynamique* que nous exposons dans un contexte plus général.

Le problème correspondant pour les groupes d'enlacements reste ouvert.

§ 1. PRÉSENTATIONS DYNAMIQUES

Soient H un groupe, I un ensemble d'indices et $L = L_{I,H}$ le groupe libre sur l'ensemble $\{x_{i,a}\}$ avec $i \in I, a \in H$.

Le groupe H opère sur L par translation du deuxième indice des générateurs. On notera cette action $S: H \rightarrow \text{Aut}(L)$, i.e.

$$S_a(x_{i,b}) = x_{i,ab},$$

$i \in I, a, b \in H$.

Définition. Soit H un groupe. Une *présentation H-dynamique* de G est une présentation de G de la forme

$$G = \langle x_{i,a} : R_{j,b} \rangle, i \in I, j \in J, a, b \in H,$$

¹) Présenté au Colloque de Topologie et d'Algèbre, Zurich, avril 1977.

telle que

$$S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}.$$

On dira que la présentation dynamique est *finie* si les ensembles d'indices I et J sont finis.

Remarque. Une présentation H -dynamique d'un groupe G fournit une action de H sur G induite par l'action de H sur le groupe libre $L_{I,H}$.

Supposons maintenant que H soit de présentation finie. On a alors:

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe muni d'une action du groupe H . Le produit semi-direct $\pi = G \tilde{\times} H$ est de présentation finie si et seulement si G possède une présentation H -dynamique finie qui induit l'action donnée de H sur G .*

Preuve. Supposons d'abord π de présentation finie. On voit facilement que l'on peut trouver une présentation de π de la forme $\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n : R_1, \dots, R_r \rangle$ telle que x_1, \dots, x_m représentent des éléments de G et z_1, \dots, z_n des éléments de H .

Soient X le groupe libre sur x_1, \dots, x_m et $p: X * H \rightarrow \pi$ la projection évidente. Soit L le groupe libre sur l'ensemble $\{x_{i,a}\}$, $i = 1, \dots, m$ et $a \in H$. On définit un homomorphisme $\lambda: L \rightarrow X * H$ par $\lambda(x_{i,a}) = ax_i a^{-1}$.

Il est clair que $p\lambda(L) \subset G$. En fait, λ est un isomorphisme de L sur $p^{-1}(G) \subset X * H$. En effet, $p^{-1}(G)$ coïncide avec le noyau de la projection $X * H \rightarrow H$. Donc tout élément de $p^{-1}(G)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$w = a_1 A_1 a_2 A_2 \dots a_N A_N (a_1 a_2 \dots a_N)^{-1}$$

avec $A_1, \dots, A_N \in X - \{e_X\}$, $a_1, \dots, a_N \in H$ et $a_2, \dots, a_N \neq e_H$.

On va définir un inverse $\mu: p^{-1}(G) \rightarrow L$ de λ . Sur X , μ est donnée par $\mu(x_i) = x_{i,e}$, où $e = e_H$ est l'élément neutre de H . Pour $w \in p^{-1}(G)$ quelconque, on écrit w sous la forme canonique ci-dessus, et on définit

$$\mu(w) = S_{a_1}(\mu A_1) \cdot S_{a_1 a_2}(\mu A_2) \cdot \dots \cdot S_{a_1 \dots a_N}(\mu A_N).$$

Comme $\lambda(S_a x) = a\lambda(x)a^{-1}$ pour tout $x \in L$, on vérifie immédiatement que $\lambda\mu = 1$. De même $\mu\lambda = 1$.

Il en résulte en particulier que $p\lambda: L \rightarrow G$ est une surjection et que les opérations de H sur L induisent la conjugaison dans π , donc l'action donnée de H sur G .

Soient maintenant Z le groupe libre sur z_1, \dots, z_n et $q: X * Z \rightarrow X * H$ la projection naturelle surjective. On a $q(R_j) \in p^{-1}(G)$ pour $j = 1, \dots, r$.

Donc il existe un unique élément $R_{j,e} = \mu q (R_j) \in L$ tel que $\lambda (R_{j,e}) = q (R_j)$.
On pose ensuite $R_{j,b} = S_b (R_{j,e})$, de sorte que $S_a (R_{j,b}) = R_{j,ab}$.

Assertion: G admet la présentation H -dynamique

$$G = \langle x_{i,a} : R_{j,b} \rangle, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$$

avec projection de présentation $p\lambda$.

Il s'agit de démontrer que $\text{Ker } p\lambda$ est exactement la clôture normale des éléments $R_{j,b}, j = 1, \dots, r, b \in H$.

D'abord

$$p\lambda (R_{j,b}) = p\lambda S_b R_{j,e} = p(b\lambda (R_{j,e}) b^{-1}) = p(bq (R_j) b^{-1}) = 1.$$

Ensuite, si $w \in \text{Ker } p\lambda$, il existe un élément $R \in X * Z$ tel que l'on ait $\lambda w = qR$, puisque $q: X * Z \rightarrow X * H$ est surjective. La relation $p\lambda w = pqR = 1$ montre que R représente 1 dans π , donc R est un produit de conjugués des éléments $R_j, j = 1, \dots, r$ et de leurs inverses. Donc $\lambda w = qR$ est un produit de conjugués des $q (R_j) = \lambda (R_{j,e})$ et de leurs inverses. Pour chaque terme $U\lambda (R_{j,e}^{\pm 1}) U^{-1}$, on peut écrire $U = a_0 A_1 a_1 \dots A_N a_N$ avec $A_i \in X$ et $a_i \in H$. En utilisant

$$A (\lambda R) A^{-1} = \lambda (\lambda A . R . (\mu A)^{-1}) \quad \text{pour } A \in X, R \in L,$$

et

$$a (\lambda R) a^{-1} = \lambda (S_a R) \quad \text{pour } a \in H, R \in L,$$

et l'injectivité de λ , on voit que w est un produit de conjugués des $R_{j,a}^\epsilon, j = 1, \dots, r, a \in H, \epsilon = \pm 1$.

Inversement, si G possède une présentation H -dynamique finie, soit $G = \langle x_{i,a} : R_{j,b} \rangle, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, s$, qui induit l'action donnée de H sur G , et si l'on se donne une présentation finie de H , soit $H = \langle z_1, \dots, z_n : R_{s+1}, \dots, R_r \rangle$, on obtient pour $\pi = G \tilde{\times} H$ la présentation

$$\pi = \langle x_{i,a}, z_1, \dots, z_n : R_{j,b}, R_{s+1}, \dots, R_r, z_j x_{i,a} z_j^{-1} = x_{i,a_j a} \rangle$$

où a_j est l'image de $z_j \in Z$ par la projection de présentation $Z \rightarrow H$.

Soit $\Psi : H \rightarrow Z$ un système de représentants des éléments de H avec $\Psi (e) = 1$. Les relations $x_{i,a} = \Psi (a) x_{i,e} \Psi (a)^{-1}$ qui résultent des relations ci-dessus permettent de se limiter aux seuls générateurs $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n$ avec $x_i = x_{i,e}$.

Soient alors $R_{j,b}^*$ les relateurs obtenus à partir de $R_{j,b}$ par substitution de $\Psi (a) x_i \Psi (a)^{-1}$ pour $x_{i,a}$. Les relations $S_a (R_{j,b}) = R_{j,ab}$ entraînent que $R_{j,b}^* = z R_{j,e}^* z^{-1} \text{ mod Ker } \{ Z \rightarrow H \}$, où $z \in Z$ représente $b \in H$.

(On notera que les relations $ux_iu^{-1} = vx_iv^{-1}$, si u et $v \in Z$ représentent le même élément de H , sont évidemment conséquences de R_{s+1}, \dots, R_r qui définissent H .) Il en résulte que π admet la présentation $\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n : R_1, \dots, R_r \rangle$, où $R_i = R_{i,e}^*$ pour $i = 1, \dots, s$.

§ 2. GROUPES DE NŒUDS

Il est maintenant facile de caractériser le sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud.

On note C le groupe cyclique infini de générateur z .

THÉORÈME 2. *Un groupe G est sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud, i.e. d'un groupe satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) de l'introduction, si et seulement si G admet une présentation C -dynamique finie avec automorphisme induit $\sigma: G \rightarrow G$ tel que*

(I) G est engendré par les éléments de la forme $x \cdot \sigma(x^{-1})$, $x \in G$;

(II) $H_2(G)$ est un $\mathbf{Z}C$ -module parfait, i.e. $\sigma_* - 1: H_2G \rightarrow H_2G$ est surjective.

Note. La condition (II) s'exprime homologiquement par $H_0(C, H_2G) = 0$. C'est sous cette forme que nous l'utiliserons.

Preuve. Soient π un groupe de nœud et $z \in \pi$ un élément dont la clôture normale est π tout entier. On a $\pi = G \tilde{\times} C$, où $G = [\pi, \pi]$ et C est infini cyclique engendré par z .

Comme π est de présentation finie, il résulte du théorème 1 que G possède une présentation C -dynamique finie avec automorphisme $\sigma: G \rightarrow G$ donné par $\sigma(x) = zxz^{-1}$.

On va voir que σ satisfait aux conditions (I) et (II) du théorème 2.

(I) Si $g \in G$, g est un produit de conjugués de z et z^{-1} , i.e. $g = \prod_i x_i z^{\varepsilon_i} x_i^{-1}$, $x_i \in \pi$, avec $\sum_i \varepsilon_i = 0$. Comme $x_i z x_i^{-1} = x_i z^a z z^{-a} x_i^{-1}$, on peut supposer $x_i \in G$ pour tout i . Or, avec $x \in G$, on a

$$xzx^{-1} = xzx^{-1}z^{-1}z = x \cdot \sigma(x^{-1}) \cdot z.$$

Il en résulte facilement que tout élément de G s'écrit comme produit d'éléments de la forme $x \cdot \sigma(x^{-1})$ et de leurs inverses.