DILATATIONEN VON ABELSCHEN GRUPPEN

Autor(en): **Suter, S. / Zagier, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-49695

DILATATIONEN VON ABELSCHEN GRUPPEN [1]

von S. Suter und D. Zagier [2]

In der Universellen Algebra assoziiert man zu einem algebraischen Objekt eine gewisse Geometrie (die Kongruenzklassengeometrie) und untersucht, welche Beziehungen es zwischen algebraischen und geometrischen Eigenschaften gibt; hierbei sind die Dilatationen der Geometrie (d.h. die Automorphismen, die Parallelität erhalten) oft besonders aufschlußreich. Falls das algebraische Objekt eine Gruppe G ist, ist eine Dilatation im geometrischen Sinne nichts anderes als eine bijektive Abbildung $\delta : G \to G$, die die Nebenklassen von jedem Normalteiler von G permutiert, d.h. für jeden Normalteiler N von G und für alle $x, y \in G$ gilt

$$xy^{-1} \in N \Leftrightarrow \delta(x)\,\delta(y)^{-1} \in N .$$

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Bestimmung der Gruppe $\Delta(G)$ von Dilatationen (bzw. der Gruppe $\Delta_0(G)$ von homogenen, d.h. das Einselement festlassenden Dilatationen) einer beliebigen abelschen Gruppe G. Zum Beispiel wird gezeigt, daß $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, falls G ein Element unendlicher Ordnung enthält, während die Dilatationsgruppen von Torsionsgruppen gleich dem Produkt der Dilatationsgruppen ihrer p-primären Komponenten sind, womit das Problem auf p-Gruppen zurückgeführt wird.

Für p-Gruppen hat man z.B: $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}_p^*$ (p-adische Einheiten), falls G reduziert und von unendlichem Exponent ist. Der schwierigste Fall ist der der endlichen Gruppen, wo die Dilatationsgruppen Kranzprodukte von zyklischen und von symmetrischen Gruppen involvieren.

Das merkwürdigste Ergebnis ist, daß für eine endliche Gruppe die homogene Dilatationsgruppe nur von den ersten beiden Torsionskoeffizienten abhängt. Die Ordnung von $\Delta_0(G)$ für eine Gruppe G mit ersten beiden Torsionskoeffizienten e, f wird für $e \leqq 32$ in der Tabelle auf der folgenden Seite angegeben.

---

[1]) Vorgetragen im Kolloquium für Topologie und Algebra, Zürich, April 1977.
[2]) Sonderforschungsbereich „Theoretische Mathematik“, Universität Bonn.

Tabelle von $|\Delta_0(G)|$ *als Funktion der beiden größten Torsionskoeffizienten* e, f

e	f	$\lvert \Delta_0(e,f) \rvert$
1	1	1
2	1	1
	2	1
3	1	2
	3	2
4	1	2
	2	2
	4	2
5	1	24
	5	4
6	1	2
	2	2
	3	2
	6	2
7	1	720
	7	6
8	1	16
	2	16
	4	4
	8	4
9	1	144
	3	18
	9	6
10	1	24
	2	24
	5	4
	10	4
11	1	3628800
	11	10
12	1	4
	2	4
	3	4
	4	4
	6	4
	12	4
13	1	479001600
	13	12
14	1	720
	2	720
	7	6
	14	6
15	1	48
	3	48
	5	8
	15	8
16	1	2048
	2	2048
	4	32
	8	8
	16	8
17	1	20922789888000
	17	16
18	1	144
	2	144
	3	18
	6	18
	9	6
	18	6
19	1	6402373705728000
	19	18
20	1	48
	2	48
	4	48
	5	8
	10	8
	20	8
21	1	1440
	3	1440
	7	12
	21	12
22	1	3628800
	2	3628800
	11	10
	22	10
23	1	1124000727777607680000
	23	22
24	1	32
	2	32
	3	32
	4	8
	6	32
	8	8
	12	8
	24	8
25	1	119439360000
	5	2500
	25	20
26	1	479001600
	2	479001600
	13	12
	26	12
27	1	483729408
	3	118098
	9	54
	27	18
28	1	1440
	2	1440
	4	1440
	7	12
	14	12
	28	12
29	1	304888344611713860501504000000
	29	28
30	1	48
	2	48
	3	48
	5	8
	6	48
	10	8
	15	8
	30	8
31	1	265252859812191058636308480000000
	31	30
32	1	67108864
	2	67108864
	4	4096
	8	64
	16	16
	32	16

I. Kongruenzklassengeometrien und Gruppengeometrien

Eine *Geometrie* ist eine Menge G zusammen mit gewissen ausgezeichneten Untermengen von G, den *Unterräumen*, von denen (mindestens) verlangt wird, daß Punkte aus G sowie beliebige Durchschnitte von Unterräumen Unterräume sind. Zu jeder Untermenge $X \subset G$ gibt es dann einen kleinsten X umfassenden Unterraum $[X] \subset G$, den man den *von X erzeugten Unterraum* oder die *Hülle von X* nennt. Man benutzt meistens die gewohnte geometrische Terminologie und bezeichnet als *Gerade* (bzw. *n-dimensionalen Unterraum*) einen von zwei (bzw. von minimal $n+1$) verschiedenen Punkten erzeugten Unterraum. Meistens hat man auch irgendeinen Begriff von *Parallelität* zwischen Unterräumen, insbesondere also zwischen Geraden; eine *Dilatation* der Geometrie ist dann eine Abbildung $\delta \colon G \to G$, welche Geraden in dazu parallele Geraden überführt. Diese Begriffe gewinnen dadurch an Interesse, daß man vielfach einer algebraischen Struktur eine Geometrie zuordnen und Beziehungen zwischen algebraischen Eigenschaften auf der einen Seite und geometrischen Eigenschaften — etwa die Gültigkeit der Sätze von Pappus und Desargues — auf der anderen Seite herstellen kann. Dabei spielen die Dilatationen oft eine Schlüsselrolle.

Das bekannteste Beispiel (Artin, *Geometric Algebra*) wird gegeben durch die affine Ebene k^2 über einem (Schief-) körper k. Diese Geometrie erfüllt folgende Axiome:

1. Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.
2. Es gibt genau eine Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt (wobei „parallel“ hier definiert wird als „identisch oder disjunkt“).
3. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
4. Es gelten die beiden Sätze von Desargues.

Wenn umgekehrt eine Geometrie diese vier Axiome erfüllt, so bilden die fixpunktfreien Dilatationen der Geometrie zusammen mit der Identitätsabbildung eine abelsche Gruppe T, die richtungserhaltenden [1]) Endomorphismen von T bilden einen Schiefkörper k und die gegebene Geometrie

[1]) Zwei Elemente $\delta_1, \delta_2 \in T$ haben dieselbe Richtung, falls für jeden Punkt P die drei Punkte P, $\delta_1(P)$, $\delta_2(P)$ auf einer Geraden liegen.

ist zu der affinen Ebene k^2 isomorph. Außerdem gilt in der Geometrie genau dann der Satz von Pappus, wenn der Körper k kommutativ ist.

Sei jetzt $(n_i)_{i \in I}$ eine Familie von natürlichen Zahlen. Eine *allgemeine Algebra vom Typ* $(n_i)_{i \in I}$ ist eine Menge A zusammen mit einer Familie von Operationen $f_i \colon A^{n_i} \to A$ $(i \in I)$. Zum Beispiel ist eine Gruppe eine Algebra vom Typ (0, 1, 2) mit $f_0 = e$, $f_1(x) = x^{-1}$ und $f_2(x, y) = x \cdot y$. Homomorphismen, Unteralgebren und Produkte von allgemeinen Algebren eines festen Typs werden in der üblichen Weise definiert. Eine *primitive Klasse* ist eine Klasse von Algebren eines festen Typs, welche geschlossen ist unter Produkten, Unteralgebren und homomorphen Bildern. Beispiele sind die Klassen der Ringe, der Gruppen, der Körper, der Vektorräume über einem gegebenen Körper usw. Nach einem Satz von G. Birkhoff ist jede primitive Klasse durch Gleichungen gegeben. Zum Beispiel gilt für die Klasse der Gruppen die Gleichung $f_2\left(x, f_1(x)\right) = f_0$ und entsprechende Gleichungen für die anderen Gruppenaxiome. Eine *Kongruenzrelation* auf einer allgemeinen Algebra A ist eine Äquivalenzrelation $\sim$, die mit den Operationen verträglich ist, d.h.

$$x_1 \sim x_1', \ldots, x_{n_i} \sim x_{n_i}' \Rightarrow f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \sim f_i(x_1', \ldots, x_{n_i}') \quad (\forall i)\,.$$

Wenn ϕ ein Homomorphismus von A in eine andere Algebra ist, so wird durch $x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$ eine Kongruenzrelation auf A erklärt, und umgekehrt hat jede Kongruenzrelation diese Gestalt. Die Äquivalenzklassen von A bezüglich einer Kongruenzrelation heißen *Kongruenzklassen.* Man kann dann der Algebra A eine Geometrie $\Gamma(A)$ zuordnen, deren zugrundeliegende Punktmenge A ist und deren Unterräume die Kongruenzklassen in A (bezüglich aller Kongruenzrelationen) sind. Der von Elementen $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ erzeugte Unterraum bzw. die Hülle $[X]$ von $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ ist somit die kleinste Kongruenzklasse, die X umfaßt. Diese Definition ist sinnvoll, da der Durchschnitt von Kongruenzklassen wieder eine Kongruenzklasse ist. Seien R, S zwei Unterräume von A. Wir nennen R zu S *parallel*, falls S eine Kongruenzklasse ist bezüglich der kleinsten Kongruenzrelation, für die R eine Klasse ist (dies ist i.a. keine Äquivalenzrelation). Eine *Dilatation* ist eine Abbildung $\delta \colon A \to A$, die mit allen Kongruenzrelationen auf A verträglich ist (d.h. $x \sim y \Rightarrow \delta(x) \sim \delta(y)$). Falls δ bijektiv ist und δ^{-1} auch eine Dilatation, so überführt δ Unterräume in parallele Unterräume. (Für die Weiterentwicklung dieser Ideen siehe R. Wille, *Kongruenzklassengeometrien*, Springer Lecture Notes No. 113, wo auch ein Algorithmus entwickelt wird, der es gestattet, für Algebren einer primitiven Klasse geometrische Sachverhalte in algebraische zu übersetzen.)

Sei nun G eine Gruppe, $\Gamma(G)$ die Geometrie von G. Die Kongruenzklassen von G und damit die Unterräume von $\Gamma(G)$ sind dann die Normalteiler von G und deren Nebenklassen. Die Hülle $[X]$ einer Untermenge $X = \{ x_1, \ldots, x_n \} \subset G$ wird gegeben durch

$$[X] = \{ r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{Z}, \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \},$$

falls G abelsch ist, und, wie man leicht zeigt, durch

$$[X] = \{ x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} g \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{Z}, \sum_{i=1}^{n} r_i = 1, g \in U \}$$

im allgemeinen, wo U die von allen Kommutatoren $[x, x_i x_j^{-1}]$ $(x \in X, 1 \leqq i < j \leqq k)$ erzeugte Untergruppe von G bezeichnet. In $\Gamma(G)$ sind zwei Unterräume genau dann parallel, wenn sie Nebenklassen desselben Normalteilers sind; insbesondere ist Parallelität für Gruppengeometrien eine Äquivalenzrelation. Die Gruppengeometrie $\Gamma(G)$ sieht aber i.a. sehr anders aus als die gewohnte affine oder projektive Geometrie: z.B. hat Wille (*Kongruenzklassengeometrien*, S. 36) gezeigt, daß $\Gamma(G)$ nur dann eindeutige Verbindungsgeraden hat (d.h. genau eine Gerade durch je zwei Punkte), wenn G entweder einfach oder elementar-abelsch ist. Dieser Satz illustriert gleichzeitig, wie stark die Wechselwirkung zwischen den geometrischen Eigenschaften von $\Gamma(G)$ und der algebraischen Struktur von G ist. Allerdings wird eine Gruppe nicht vollständig durch ihre Geometrie bestimmt, da z.B. die zwei nicht-isomorphen einfachen Gruppen $\mathfrak{A}_8$ und $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{F}_4)$ der Ordnung 20160 isomorphe Geometrien haben. Um weiter zu verdeutlichen, wie Gruppengeometrien aussehen können, machen wir hier einige Bemerkungen über die Dimension $\dim(G)$ einer Gruppe G aufgefaßt als Unterraum in $\Gamma(G)$. Per definitionem ist $\dim(G)$ die kleinste Zahl n, so daß es eine n-elementige Untermenge von G gibt, die in keinem echten Normalteiler von G enthalten ist. Insbesondere ist $\dim(G) = 1$ genau dann, wenn G das normale Erzeugnis eines einzigen Elements ist, d.h. wenn $\bigcup_{N \underset{\neq}{\lhd} G} N \neq G$.

Wenn N ein Normalteiler von G ist, so gilt immer $\dim(G/N) \leqq \dim(G)$, aber nicht immer $\dim(N) \leqq \dim(G)$ (Beispiel: die „Gerade" A_4 enthält die „Ebene" $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ als Normalteiler). Indem man G durch die Frattini-Gruppe $\Phi(G)$ (= Durchschnitt aller maximalen Normalteiler) teilt, was die Dimension offenbar nicht ändert, kann man zeigen, daß

$\dim(G) = \dim(G_{ab}) = \max \{ k \mid \exists$ Primzahl p und eine Surjektion $G \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k \}$, außer im Falle $G_{ab} = \{ 1 \}$, $G \neq \{ 1 \}$, wo $\dim(G) = 1$, $\dim(G_{ab}) = 0$ ist.

II. Dilatationen von Gruppen

In Kapitel I wurde eine Dilatation einer Kongruenzklassengeometrie als eine Abbildung δ der Geometrie definiert, die Unterräume in parallele Unterräume überführt. Für Gruppengeometrien bedeutet das, daß δ jede Nebenklasse von jedem Normalteiler von G in eine Nebenklasse desselben Normalteilers überführt. Wir betrachten ab jetzt nur die bijektiven Dilatationen, d.h. die Bijektionen $\delta \colon G \to G$ mit der Eigenschaft

$$(1) \qquad xy^{-1} \in N \Leftrightarrow \delta(x)\,\delta(y)^{-1} \in N \qquad (N \lhd G, x, y \in G).$$

Wir bezeichnen mit $\Delta(G)$ die Gruppe der Dilatationen und mit $\Delta_0(G) = \{\delta \in \Delta(G) \mid \delta(e) = e\}$ die Untergruppe der *homogenen* Dilatationen.

Die Dilatationen $\delta \colon G \to G$ werden auch dadurch charakterisiert, daß es für jeden Epimorphismus $\pi \colon G \to G'$ eine Permutation δ' von G' mit

$$(2) \qquad \delta' \circ \pi = \pi \circ \delta$$

gibt. Offenbar ist δ' durch δ eindeutig bestimmt und ist eine Dilatation von G'. Sei $\Delta(\pi)$ der Homomorphismus $\Delta(G) \to \Delta(G')$, der δ auf δ' schickt; dann wird Δ zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen und Epimorphismen in die Kategorie der Gruppen. Entsprechend haben wir den Unterfunktor $\Delta_0(\pi) \colon \Delta_0(G) \to \Delta_0(G')$. Wenn N ein Normalteiler von G ist, dann liefert die Beschränkungsabbildung $\delta \mid N$, $\delta \in \Delta_0(G)$, einen Homomorphismus $\Delta_0(G) \to \Delta_0(N)$ (aber keinen Funktor).

Beispiele von nicht-homogenen Dilatationen sind die Links- und Rechtstranslationen

$$l(g) \colon x \mapsto gx\,, \quad r(g) \colon x \mapsto xg \qquad (x, g \in G).$$

Beispiele von homogenen Dilatationen sind die Abbildung

$$(3) \qquad \iota \colon x \to x^{-1} \qquad (x \in G)$$

mit $\iota^2 = 1$, $\iota\, l(g^{-1})\, \iota = r(g)$, sowie die inneren Automorphismen $l(g)\, r(g)^{-1}$ $(g \in G)$. Im allgemeinen gilt weder $\mathrm{Aut}(G) \subset \Delta_0(G)$ noch $\Delta_0(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$. Folgender Satz gibt Auskunft über die Beziehung zwischen $\Delta_0(G)$ und $\Delta(G)$.

Satz 1. *Die Gruppe $l(G)$ der Linkstranslationen und die Gruppe $\Delta_0(G)$ der homogenen Dilatationen sind in $\Delta(G)$ komplementär, d.h. $l(G)\,\Delta_0(G) = \Delta(G)$, $l(G) \cap \Delta_0(G) = \{1\}$. Insbesondere ist $\Delta(G)$*

als Menge zu $G \times \Delta_0(G)$ *isomorph. Die folgenden Beidngungen für* G *sind äquivalent:*

a) $l(G) \lhd \Delta(G)$,

b) $r(G) \lhd \Delta(G)$,

c) $\Delta_0(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$.

Falls diese Bedingungen gelten, ist $\Delta(G)$ *isomorph zum semidirekten Produkt* $G \ltimes \Delta_0(G)$. *Die Gruppe* G *ist dann notwendigerweise abelsch.*

Beweis. Jede Dilatation $\delta \in \Delta(G)$ hat eine (offenbar eindeutige) Zerlegung als Produkt einer Linkstranslation und einer homogenen Dilatation, nämlich $\delta = l(\delta(e)) \cdot f(\delta)$ mit $f(\delta) = l(\delta(e)^{-1})\, \delta \in \Delta_0(G)$. Man verifiziert leicht, daß die Bedingungen a), b), c) und die Bedingung, daß $f: \Delta(G) \to \Delta_0(G)$ ein Homomorphismus ist, jeweils zu der Formel

$$\delta(xy) = \delta(x)\,\delta(e)^{-1}\,\delta(y) \qquad (\forall\, x, y \in G, \delta \in \Delta_0(G))$$

äquivalent sind. Falls diese Bedingungen gelten, ist die Folge

$$1 \to G \xrightarrow{l} \Delta(G) \xrightarrow{f} \Delta_0(G) \to 1$$

exakt und stellt $\Delta(G)$ als semidirektes Produkt von G und $\Delta_0(G)$ dar. Schließlich liegt das Element ι von $\Delta_0(G)$ nur dann in $\mathrm{Aut}(G)$, wenn G abelsch ist, so daß die letzte Behauptung des Satzes aus c) folgt.

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Dilatationen von Gruppen, die als Vereinigung von Normalteilern, als direkte Summe oder als Gruppenerweiterung dargestellt sind. Alle drei Teile werden für die Bestimmung der Dilatationsgruppen abelscher Gruppen benötigt werden.

SATZ 2. a) *Sei* G *eine Gruppe,* $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ *eine Folge von Normalteilern mit* $G = \bigcup G_n$ *und* $\Delta_0(G_1) \leftarrow \Delta_0(G_2) \leftarrow \ldots$ *das durch die Beschränkungsabbildungen gegebene inverse System. Dann liefern die Beschränkungsabbildungen* $\Delta_0(G) \leftarrow \Delta_0(G_n)$ *einen natürlichen Isomorphismus* $p: \Delta_0(G) \to \varprojlim_n \Delta_0(G_n)$.

b) *Sei* $G = \bigoplus_\alpha G_\alpha$ *eine direkte Summe und* $\pi_\alpha: G \to G_\alpha$ *die Projektionen. Dann ist jedes* $\delta \in \Delta(G)$ *gleich dem Produkt der Dilatationen* $\delta_\alpha = \Delta(\pi_\alpha)\, \delta \in \Delta(G_\alpha)$. *Insbesondere sind die Homomorphismen* $\prod_\alpha \Delta(\pi_\alpha): \Delta(G) \to \prod_\alpha \Delta(G_\alpha)$ *und* $\prod_\alpha \Delta_0(\pi_\alpha): \Delta_0(G) \to \prod_\alpha \Delta_0(G_\alpha)$ *injektiv.*

c) *Sei* $1 \to N \to G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ *eine exakte Folge von Gruppen. Dann gibt es einen (nicht-natürlichen) injektiven Homomorphismus* $\Delta(G) \hookrightarrow \Delta(N)$

$\wr\ \Delta(Q)$, wobei $\Delta(N) \wr \Delta(Q) = \Delta(N)^Q \rtimes \Delta(Q)$ das durch die Operation von $\Delta(Q)$ auf Q definierte Kranzprodukt ist.

Beweis. a) Wir haben $p(\delta) = (\delta \mid G_n)_{n=1}^{\infty}$. Es ist klar, daß p wohldefiniert und injektiv ist. Für die Surjektivität definiere man ein Urbild von $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ durch $\delta(x) = \delta_n(x)$, wo $n = n(x)$ ein beliebiger Index mit $x \in G_n(x)$ ist. Diese Operation von δ hängt nicht von n ab; weiter ist klar, daß δ bijektiv ist, und schließlich ist mit $xy^{-1} \in N$, N ein beliebiger Normalteiler von G, auch $\delta(x)\,\delta(y)^{-1} \in N$, denn für ein geeignetes n gilt $x, y \in G_n$ und somit $xy^{-1} \in N \cap G_n$, $\delta(x)\,\delta(y)^{-1} = \delta_n(x)\,\delta_n(y)^{-1} \in N \cap G_n \subset N$.

b) folgt aus der Formel $\pi_\alpha \delta = \delta_\alpha \pi_\alpha$ (Gleichung (2)). Wir bemerken, daß für $\delta \in \Delta_0(G)$ die Dilatation δ_α mit der Beschränkung $\delta \mid G_\alpha$ übereinstimmt.

c) Für jedes $q \in Q$ wählen wir ein Element $x_q \in \pi^{-1}(q)$ als Vertreter für die Nebenklassen in G/N. Sei $\delta \in \Delta(G)$ und sei $\delta' \in \Delta(Q)$ das Bild von δ unter $\Delta(\pi)$. Dann bildet δ die Nebenklasse $x_q N$ auf $x_{\delta'(q)} N$ ab, so daß wir durch die Formel $\delta(x_q n) = x_{\delta'(q)}\,\delta_q(n)$ $(q \in Q,\ n \in N)$ eine Abbildung $\delta_q \colon N \to N$ definieren können. Man sieht sofort, daß δ_q eine Dilatation von N ist und daß δ durch die Dilatationen δ' und δ_q $(q \in Q)$ bestimmt wird. Somit haben wir eine injektive Abbildung von $\Delta(G)$ nach $\Delta(N)^Q \times \Delta(Q)$. Man prüft sofort nach, daß diese Abbildung ein Homomorphismus wird, wenn man die Menge $\Delta(N)^Q \times \Delta(Q)$ mit der Gruppenstruktur des Kranzproduktes $\Delta(N) \wr \Delta(Q)$ versieht.

Ab jetzt betrachten wir nur abelsche Gruppen und schreiben entsprechend die Gruppenoperation additiv. Dann läßt sich die Bedingung, daß eine bijektive Abbildung $\delta \colon G \to G$ eine Dilatation ist, folgendermaßen schreiben:

$$(4) \qquad \langle x - y \rangle = \langle \delta x - \delta y \rangle \qquad (\forall x, y \in G).$$

($\langle\ \rangle$ bedeutet Erzeugnis.) Gleichwertig hiermit ist die Bedingung: für alle $x, y \in G$ gibt es eine Zahl $m = m_{xy} \in \mathbf{Z}$, sodaß

$$(5) \qquad \delta(x) - \delta(y) = m(x - y) \qquad \text{und} \qquad (m, o(x-y)) = 1\,.$$

Hierbei bezeichnet $o(x)$ die Ordnung von x mit der Konvention $o(x) = 0$ für Elemente unendlicher Ordnung und $(m, 0) = |m|$. Für homogene Dilatationen δ folgt hieraus mit $y = 0$, daß es für alle $x \in G$ ein $m_x \in \mathbf{Z}$ gibt mit

$$(6) \qquad \delta(x) = m_x x \qquad (m_x, o(x)) = 1\,.$$

Für ein Element x unendlicher Ordnung ist $m_x = \pm 1$; für Torsionselemente x ist m_x nur mod $o(x)$ bestimmt. Für jedes $x \in G$ definiert die Abbildung $\delta \mapsto m_x$ einen Homomorphismus $\Delta_0(G) \to (\mathbf{Z}/o(x)\,\mathbf{Z})^*$. Wir nennen zwei Elemente $x, y \in G$ *linear unabhängig*, falls $< x > \cap < y > = \{ 0 \}$. Aus (5) und (6) folgt leicht die nützliche Bedingung

$$(7) \qquad x, y \text{ linear unabhängig} \Rightarrow m_x \equiv m_y \,(\mathrm{mod}\,(o(x), o(y)))\,.$$

Beispiel. Sei $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$, p eine Primzahl, $r \geqq 2$. Dann ist $\Delta_0(G) \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$: Je zwei Elemente x, y aus G lassen sich durch eine Kette linear unabhängiger Elemente verbinden, und die haben alle die Ordnung p. Dabei ist für $\delta \in \Delta_0(G)$ $n_x \equiv n_y$ (mod p), also hat jede Dilatation $\delta \in \Delta_0(G)$ die Gestalt $x \mapsto nx$, $n \not\equiv 0$ (mod p). Dagegen ist für $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ die Dilatationsgruppe viel größer: für $x \neq y$ ist Bedingung (4) leer, da $x - y$ invertierbar ist, also $\Delta(G) \cong \mathfrak{S}_p$ (symmetrische Gruppe auf p Buchstaben), $\Delta_0(G) \cong \mathfrak{S}_{p-1}$. Wir bemerken, daß wir hiermit auch Beispiele abelscher Gruppen bekommen, wo die Bedingungen von Satz 1 erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

Mit Hilfe von (5) können wir leicht $\Delta_0(G)$ für alle abelschen Gruppen berechnen, die keine Torsionsgruppen sind.

SATZ 3. *Sei G eine abelsche Gruppe, die ein Element unendlicher Ordnung enthält. Dann gilt $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\Delta(G) \cong G \rtimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, wobei die Operation des nicht-trivialen Elements von $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ auf G durch $x \to -x$ gegeben wird.*

Beweis. Die Formel für $\Delta(G)$ folgt wegen Satz 1 aus der Beziehung $\Delta_0(G) = \{ \pm 1 \}$, die wir erst für zwei Spezialfälle beweisen.

Fall 1. $G = \mathbf{Z}$.
Für $\delta \in \Delta_0(\mathbf{Z})$ wissen wir, daß $\delta(x) = \pm x$ für jedes $x \in \mathbf{Z}$. Insbesondere ist $\delta(1) = \pm 1$. Ist etwa $\delta(1) = +1$, so folgt aus (5)

$$\delta(x) - 1 = \delta(x) - \delta(1) = \pm(x-1)$$

für jedes $x \in \mathbf{Z}$, $x \neq 1$, also

$$\delta(x) \in \{ x, -x \} \cap \{ 1 + (x-1), 1 - (x-1) \} = \{ x \}$$

d.h. $\delta = id$. Entsprechend ist $\delta = -id$, falls $\delta(1) = -1$.

Fall 2. $G = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ oder $G = \mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})$.
Sei $x = (1, 0)$ und $\delta \in \Delta_0(G)$. Indem wir notfalls δ durch $-\delta$ ersetzen, können wir annehmen, daß $\delta(x)$ gleich $+x$ ist. Sei nun $y = (a, b) \in G$ beliebig. Wir wollen zeigen, daß $\delta(y) = y$. Dies gilt nach Fall 1, falls

$b = 0$, und nach (7), falls $a = 0$. Sind a und b von Null verschieden, so setzen wir $z = (a, 0)$. Dann gilt wegen $\delta(z) = z$ und (5)

$$\delta(y) = m(y-z) + \delta(z) = m(y-z) + z = (a, mb)$$

für ein geeignetes $m \in \mathbf{Z}$. Andererseits ist aber $\delta(y) = \pm y$, da wegen $a \neq 0$ das Element y unendliche Ordnung hat. Hieraus folgt $\delta(y) = +y$, $\delta = id$. Ist nun G eine beliebige abelsche Gruppe, $x \in G$ ein festes Element unendlicher Ordnung und $\delta \in \Delta_0(G)$ eine Dilatation mit (o.B.d.A.) $\delta(x) = +x$, so muß $\delta(y) = y$ für jedes $y \in G$ sein, da die von x und y erzeugte Untergruppe isomorph $\mathbf{Z}, \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ oder $\mathbf{Z} \oplus r\mathbf{Z}$ ist und die Beschränkung von δ auf diese Untergruppe nach dem bereits Bewiesenen gleich der Identität.

Für abelsche Torsionsgruppen lassen sich Δ und Δ_0 auf natürliche Weise zerlegen:

Satz 4. *Sei G eine abelsche Torsionsgruppe, $G \cong \bigoplus_p G_p$ ihre kanonische Zerlegung in p-primäre Gruppen G_p. Dann ist $\Delta(G) \cong \prod_p \Delta(G_p)$ und $\Delta_0(G) \cong \prod_p \Delta_0(G_p)$.*

Beweis. Wegen Satz 2 b) bleibt nur zu zeigen, daß der Homomorphismus $\prod_p \Delta(\pi_p)\colon \Delta(G) \to \prod_p \Delta(G_p)$ surjektiv ist. Sei $(\delta_2, \delta_3, \delta_5, \ldots) \in \prod_p \Delta(G_p)$. Die Abbildung $x = x_2 + \ldots + x_p \mapsto \delta_2(x_2) + \ldots + \delta_p(x_p)$ ist eine Dilatation, denn für $x = x_2 + \ldots + x_r$, $y = y_2 + \ldots + y_s \in G$ gibt es $n_p \in \mathbf{Z}$ $(p = 2, 3, \ldots, \max\{r, s\})$, sodaß $\delta_p(x_p) - \delta_p(y_p) = n_p(x_p - y_p)$ und n_p invertierbar mod $(o(x_p - y_p))$, und dann gibt es wegen der Teilerfremdheit der $o(x_p - y_p)$ eine zu $o(x-y)$ teilerfremde Zahl $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \equiv n_p (\bmod (o(x_p - y_p)))$ für alle p. Somit ist δ Dilatation und offenbar ein Urbild von $(\delta_2, \delta_3, \ldots)$. Die Behauptung für Δ_0 folgt ähnlich.

Die Berechnung von $\Delta(G)$ und $\Delta_0(G)$ für abelsche Gruppen G wird durch die Sätze 3 und 4 auf die Berechnung von $\Delta(G_p)$ bzw. $\Delta_0(G_p)$ für p-primäre Gruppen G_p reduziert, die wir im nächsten Kapitel durchführen. Zuvor beweisen wir jedoch einen Satz über abelsche Gruppen von endlichem Exponent.

Sei G eine Gruppe mit endlichem Exponent e. Wir können G in der Gestalt $G = (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$ schreiben und setzen $f = \operatorname{Exp}(G')$. Die Zahlen e und f werden wir „die beiden größten (ersten) Torsionskoeffizienten von G" nennen (in Übereinstimmung mit der Terminologie für endliche abelsche Gruppen). Unser Hauptresultat über Gruppen endlichen Exponents ist, daß ihre homogenen Dilatationsgruppen nur von diesen beiden ersten Torsionskoeffizienten abhängen.

Satz 5. *Sei* G *eine Gruppe von endlichem Exponent* e, $G = (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$, $\operatorname{Exp}(G') = f$, $\pi : G \to G'$ *die Projektion. Dann gilt:*

i) *Das Bild des Homomorphismus* $\Delta_0(\pi) : \Delta_0(G) \to \Delta_0(G')$ *besteht aus allen Dilatationen von* G' *der Gestalt* $x \mapsto mx$ $(m \in \mathbf{Z}, (m, f) = 1)$ *und ist somit zu* $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$ *isomorph.*

ii) *Der Beschränkungshomomorphismus* $\Delta_0(G) \to \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$ *ist injektiv. Sein Bild ist die nur von* e *und* f *abhängige Gruppe*

$$\Delta_0(e, f) = \{\delta \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \mid \exists\, m \in \mathbf{Z},\ (m, f) = 1, \text{ sodaß es für alle } x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \text{ ein } n \in \mathbf{Z} \text{ gibt mit } \delta(x) - \delta(y) = n(x - y) \text{ und } n \equiv m \pmod{f}\}.$$

Diese Gruppe ist eine Erweiterung

$$1 \to \tilde{\Delta}_0(e, f) \to \Delta_0(e, f) \to (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^* \to 1, \tag{8}$$

wobei

$$\tilde{\Delta}_0(e, f) = \{\delta \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \mid \text{für alle } x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \text{ gibt es ein } n \equiv 1 \pmod{f} \text{ mit } \delta(x) - \delta(y) = n(x - y)\}.$$

Beweis. Nach Satz 2 b) hat jede Dilatation $\delta \in \Delta_0(G)$ die Gestalt $\delta_1 \times \delta_2$ mit $\delta_1 \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$, $\delta_2 \in \Delta_0(G')$. Sei $a \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$ eine Erzeugende. Dann gibt es nach (6) eine Zahl $m \in \mathbf{Z}$, $(m, e) = 1$, mit $\delta_1(a) = ma$, und nach (7) gilt dann $\delta_2(x) = mx$ für alle $x \in G'$, da die Elemente aus $\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$ und G' in G linear unabhängig sind. Hieraus folgt bereits, daß die Dilatation $\delta_2 = \Delta_0(\pi)\,\delta$ die Gestalt $x \mapsto mx$ für eine geeignete zu f teilerfremde Zahl $m \in \mathbf{Z}$ hat, und auch, daß die Dilatation δ durch δ_1 vollständig bestimmt wird, d.h. $\Delta_0(G) \hookrightarrow \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$. Behauptung i) ist jetzt klar, denn für jedes $m \in \mathbf{Z}$ mit $(m, f) = 1$ ist die Multiplikation mit n, wenn $(n, e) = 1$ und $n \equiv m \pmod{f}$, eine Dilatation von G, deren Beschränkung auf G' die Multiplikation mit m ist.

Wir müssen noch das Bild von $\Delta_0(G)$ in $\Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$ bestimmen, d.h. untersuchen, für welche Dilatationen $\delta_1 \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$ die Abbildung $\delta_1 \times \delta_2$, wo δ_2 Multiplikation mit einer zu f teilerfremden Zahl m ist, eine Dilatation ist. Nach (5) ist dafür notwendig und hinreichend, daß es für alle $x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$, $x', y' \in G'$, eine Zahl $n \in \mathbf{Z}$ mit

$$(\delta_1(x) - \delta_1(y), \delta_2(x') - \delta_2(y')) = n(x - y, x' - y'),$$

d.h. mit

$$\delta_1(x) - \delta_1(y) = n(x - y), \quad m(x' - y') = n(x' - y')$$

gibt. Da die letzte Gleichung genau dann für alle $x', y' \in G'$ gilt, wenn $n \equiv m \pmod f$, ist diese Bedingung mit $\delta_1 \in \Delta_0(e,f)$ äquivalent.

Bemerkungen. 1. Satz 5 enthält eine implizite Beschreibung von $\Delta_0(G)$ für alle abelschen Gruppen G. Denn wenn G keine Torsionsgruppe ist, ist $\Delta_0(G)$ nach Satz 3 zu $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ isomorph. Ist G aber eine Torsionsgruppe, dann läßt sich G als Vereinigung von Gruppen endlichen Exponents darstellen, $G = \bigcup_{N=1}^{\infty} G[N]$ mit $G[N] = \{ g \in G \mid Ng = 0 \}$, und nach Satz 2 a) gilt

$$\Delta_0(G) = \varprojlim_{N} \Delta_0(G[N]) . \tag{9}$$

2. Nach Satz 4 ist $\Delta_0(e,f) = \Pi\, \Delta_0(p_i^{r_i}, p_i^{s_i})$, falls $e = \Pi\, p_i^{r_i}, f = \Pi p_i^{s_i}$ mit p_i prim, $r_i \geqq s_i \geqq 0$ ist. Somit genügt es, die Gruppen $\Delta_0(p^r, p^s)$ zu berechnen.

3. Obwohl die Sequenz (8) i.a. nicht spaltet, ist es für die Berechnung von $\Delta_0(e,f)$ hinreichend, wenn wir die Gruppe $\tilde{\Delta}_0(e,f)$ kennen. Denn $\Delta_0(e,f)$ ist das Produkt des Normalteilers $\tilde{\Delta}_0(e,f)$ und der zu $(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})^*$ isomorphen Untergruppe der Multiplikationen (da letztere sich surjektiv auf $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$ abbildet), und wir kennen den Durchschnitt der beiden Untergruppen sowie die Operation der Multiplikationen auf $\tilde{\Delta}_0(e,f)$.

4. Schließlich hat man (analog zu Satz 5) für die gesamte Dilatationsgruppe von $G = (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$ die exakte Sequenz

$$1 \to \tilde{\Delta}(e,f) \to \Delta(G) \to G' \rtimes (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^* \to 1 , \tag{10}$$

wobei

$$\tilde{\Delta}(e,f) = \{ \delta \in \Delta(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \mid \forall\, x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}\ \exists\, n \equiv 1 \pmod f \text{ mit } \delta(x) - \delta(y) = n(x-y) \} . \tag{11}$$

Denn wenn $\delta = \delta_1 \times \delta_2$ eine Dilatation auf $(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$ ist mit $\delta_1(1) - \delta_1(0) = n$, so gilt für δ_2 die Beziehung

$$\delta_2(x) - \delta_2(y) = n(x-y) \qquad (\forall x, y \in G')$$

(Anwendung von (7) auf die Elemente $(1, x)$ und $(0, y)$). Mit anderen Worten: δ_2 liegt in der zu $G' \rtimes (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$ isomorphen Gruppe der „affinen" Dilatationen $x \mapsto mx + a$ $(m \in (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*, a \in G')$ und δ_1 liegt, falls δ_2

(oder auch nur das Bild von δ_2 in $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$) trivial ist, in $\tilde{\Delta}(e, f)$. Die Bemerkungen 1.—3. gelten ebenso für nicht-homogene Dilatationen, sodaß wir die Bestimmung von $\Delta(G)$ für beliebige abelsche Gruppen auf die Bestimmung von $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ zurückgeführt haben.

Wir müssen also nur noch die Gruppen $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$ und $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ berechnen, was im nächsten Kapitel geschieht.

III. Dilatationsgruppen von endlsichen abelschen p-Gruppen

Seien p eine Primzahl und $r \geqq s \geqq 0$ ganze Zahlen. In diesem Kapitel wollen wir die Gruppen $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$ und $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ berechnen. Da diese Gruppen Untergruppen von $\Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ bzw. von $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ sind, behandeln wir zunächst den Spezialfall $s = 0$.

Satz 6. a) *Die Dilatationsgruppe der zyklischen Gruppe* $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ *ist zum r-fachen Kranzprodukt der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_p$ *isomorph,*

$$\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong \underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \ldots \wr \mathfrak{S}_p}_{r \text{ mal}}, \tag{12}$$

wo das Kranzprodukt von einer Gruppe H *mit* $\mathfrak{S}_p$ *durch die Operation von* $\mathfrak{S}_p$ *als Permutationsgruppe von* p *Elementen gegeben wird, d.h.* $H \wr \mathfrak{S}_p = \underbrace{(H \times \ldots \times H)}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathfrak{S}_p$. *Insbesondere gilt*

$$|\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})| = p\,!^{1+p+p^2+\ldots+p^{r-1}} = p\,!^{(p^r-1)/(p-1)}. \tag{13}$$

b) *Die homogene Dilatationsgruppe von* $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ *wird gegeben durch*

$$\Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \ldots \times (\underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \ldots \wr \mathfrak{S}_p}_{r-1 \text{ mal}} \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \tag{14}$$

und hat die Ordnung $p\,!^{(p^r-1)/(p-1)}/p^r$.

Beweis. Wir werden $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ induktiv bestimmen, indem wir die Gruppe $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ in Nebenklassen nach der Untergruppe $p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ zerlegen. Nach Satz 4 c) mit $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$, $N = p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ und $Q = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ gibt es einen injektiven Homomorphismus

$$(15) \qquad \varphi : \Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \hookrightarrow \Delta(N) \wr_Q \Delta(Q) = \Delta(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z})^p \rtimes \mathfrak{S}_p ,$$

wobei wir benutzt haben, daß $\Delta(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \cong \mathfrak{S}_p$. Die Abbildung φ wird wie folgt explizit beschrieben: Wir schreiben $G = \bigcup_{j=0}^{p-1} L_j$ mit $L_j = \{ x \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z} \mid x \equiv j \pmod p \}$ $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$. Jedes L_j können wir vermöge $x \mapsto \frac{x-j}{p}$ $(\bmod\, p^{r-1})$ mit $\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}$ identifizieren. Jede Dilatation $\delta \in \Delta(G)$ permutiert einerseits die Restklassen L_j und induziert somit eine Permutation δ' von $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, andererseits induziert δ vermöge der Identifikation der L_j mit $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ Dilatationen $\delta_0, \ldots, \delta_{p-1} \in \Delta(N)$, die durch die Formel

$$(16) \qquad \delta(j+ap) = \delta'(j) + \delta_j(a)\cdot p \qquad (j \in \{0, \ldots, p-1\},\ a \in N)$$

definiert werden. Die Abbildung φ wird dann durch $\delta \mapsto ((\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}), \delta')$ gegeben.

Wir wollen zeigen, daß φ surjektiv ist. Seien $\delta' \in \mathfrak{S}_p$ und p Dilatationen $\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}$ von $\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}$ gegeben. Dann wird durch (16) eine bijektive Abbildung δ von G auf sich definiert. Wir müssen zeigen, daß δ die Gleichung (5) für alle $x, y \in G$ erfüllt. Sind x und y modulo p kongruent, so gibt es ein $j \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit $x = j + pa$, $y = j + pb$ und, wegen der dilatativen Eigenschaft von δ_j, eine zu p teilerfremde Zahl $n \in Z$ mit $\delta_j(a) - \delta_j(b) = n(a-b)$. Dann ist

$$\delta(x) - \delta(y) = [\delta'(j) + p\,\delta_j(a)] - [\delta'(j) + p\,\delta_j(b)] = n(x-y) .$$

Sind x und y verschieden modulo p, so sind $\delta(x)$ und $\delta(y)$ auch modulo p verschieden (da δ' eineindeutig ist) und die Bedingung (5) ist automatisch erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ zu $\Delta(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \wr \mathfrak{S}_p$ isomorph ist, woraus (12) durch Induktion über r folgt.

b) Sei $\delta \in \Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ mit $\varphi(\delta) = ((\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}), \delta')$. Wegen (16) ist δ genau dann homogen, wenn δ' und δ_0 homogen sind. Wir können dann δ' als Permutation von $\{1, \ldots, p-1\}$ auffassen und erhalten durch $\varphi(\delta) \mapsto \delta_0 \times ((\delta_1, \ldots, \delta_{p-1}), \delta')$ den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \Delta_0(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \times [\Delta(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \wr \mathfrak{S}_{p-1}] \\ &\cong \Delta_0(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \times (\underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \ldots \wr \mathfrak{S}_p}_{r-1 \text{ mal}} \wr \mathfrak{S}_{p-1}) , \end{aligned}$$

woraus (14) durch Induktion über r folgt.

Der Fall $s > 0$ sieht ganz anders aus. Ein Grund hierfür ist, daß die definierende Eigenschaft dieser Gruppen, nämlich

$$(17)\quad \forall\, x, y \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\ \exists\, u \in \mathbf{Z} \quad \text{mit} \quad \delta(x) - \delta(y) = (1+p^s u)(x-y)$$

die Bedingung (5) impliziert, sodaß die Abbildungen δ, die (17) genügen, automatisch bijektive Dilatationen sind.

Satz 7. *Sei* p *eine Primzahl,* $r \geqq 1$. *Dann gilt*

$$(18)\quad \tilde{\Delta}(p^r, p) \cong \underbrace{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \dots \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}_{r \text{ mal}}$$

$$(19)\quad \tilde{\Delta}_0(p^r, p) \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \dots \times \underbrace{(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \dots \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}_{r-1 \text{ mal}})^{p-1},$$

wobei das Kranzprodukt von einer Gruppe H *mit* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ *durch die Operation von* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ *als zyklische Permutationsgruppe auf* p *Elementen gegeben wird, d.h.* $H \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \underbrace{H \times \dots \times H}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. *Insbesondere gilt*

$$(20)\quad |\tilde{\Delta}(p^r, p)| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}}$$

$$(21)\quad |\tilde{\Delta}_0(p^r, p)| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}-r}.$$

Beweis. Gleichung (18) ist für $r = 1$ trivial, da $\tilde{\Delta}(p, p)$ nur aus Translationen besteht. Sei also $r \geqq 2$ und $\psi \colon \tilde{\Delta}(p^r, p) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ die Abbildung, die δ auf den Wert von $\delta(x) - x \pmod p$ schickt, wo $x \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$; wegen (17) (mit $s=1$) ist dieser Wert von x unabhängig. Falls eine Dilatation δ in Ker ψ liegt, bildet δ jede Nebenklasse $L_j = j + p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ auf sich ab, sodaß wir durch die Formel

$$(22)\quad \delta(j+ap) = j + \delta_j(a)\,p \qquad (j \in \{0, \dots, p-1\},\ u \in \mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z})$$

p Dilatationen $\delta_j \in \Delta(Z/p^{r-1}Z)$ erhalten. Jedes δ_j liegt in $\tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)$, denn für $a, b \in \mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}$ gibt es wegen (17) eine Zahl $u \in \mathbf{Z}$ mit

$$(23)\quad p(\delta_j(a) - \delta_j(b)) = \delta(j+ap) - \delta(j+bp) \equiv (1+up)(ap-bp) \pmod{p^r}.$$

Wir haben also eine injektive Abbildung

(24) $$\operatorname{Ker}\psi \to \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p, \quad \delta \mapsto (\delta_0, \dots, \delta_{p-1})$$

konstruiert; wir behaupten, daß sie ein Isomorphismus ist. Wenn nämlich $\delta_0, \dots, \delta_{p-1} \in \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)$ vorgegeben sind und δ durch (22) definiert wird, dann gilt erst $\delta(x) \equiv x \pmod{p}$ $(\forall x \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ und somit $\delta(x) - \delta(y) \equiv x - y \pmod{p}$, was für $x \not\equiv y \pmod{p}$ schon ausreicht, um die Existenz einer Zahl u wie in (17) zu zeigen; falls x und y kongruent modulo p sind, schreiben wir $x = j + ap$, $y = j + bp$ und erhalten wie in (23) die Existenz von u aus der entsprechenden Eigenschaft von δ_j. Somit haben wir eine exakte Folge

$$1 \to \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p \to \tilde{\Delta}(p^r, p) \xrightarrow{\psi} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 1\,.$$

Man rechnet leicht nach, daß ψ spaltet und daß $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ auf $\tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p$ durch zyklische Permutation operiert, also

$$\tilde{\Delta}(p^r, p) \cong \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p) \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\,.$$

Gleichung (18) folgt hieraus durch Induktion über r.

Die Gruppe $\tilde{\Delta}_0(p^r, p)$ ist eine Untergruppe von $\operatorname{Ker}\psi$ und entspricht unter dem Isomorphismus (24) offensichtlich der Gruppe $\tilde{\Delta}_0(p^{r-1}, p) \times \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^{p-1}$, sodaß Gleichung (19) unter Benutzung von (18) durch nochmalige Induktion über r folgt.

Satz 8. *Sei p eine Primzahl, $r \geqq s \geqq 1$. Dann gibt es eine exakte Folge*

(25) $$1 \to (\underbrace{(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \wr \dots \wr (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}_{r-s \text{ mal}})^p \to \tilde{\Delta}(p^r, p^s) \to \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \to 1$$

und einen Isomorphismus

(26) $$\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s) \cong ((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \dots \times (\underbrace{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \dots \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}_{r-s \text{ mal}}))^{p-1},$$

insbesondere gilt

(27) $$|\tilde{\Delta}(p^r, p^s)| = p^{p+p^2+\dots+p^{r-s}+s},$$

(28) $$|\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)| = p^{p+p^2+\dots+p^{r-s}-r+s}.$$

Beweis. Der Fall $r = s$ ist trivial. Sei also $r > s$. Analog zu Satz 7 definieren wir eine surjektive Abbildung $\psi \colon \tilde{\Delta}(p^r, p^s) \to \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$, indem wir eine Dilatation δ auf den (nach (17) von x unabhängigen) Wert von $\delta(x) - x \pmod{p^s}$ abbilden. Für $\delta \in \operatorname{Ker} \psi$ setzen wir

$$\bar{\delta}(x) = x + \frac{\delta(x) - x}{p^{s-1}} \in \mathbf{Z}/p^{r-s+1}\mathbf{Z}\,. \tag{29}$$

Dann ist (17) zu der Gleichung

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\ \exists u \in \mathbf{Z} \text{ mit } \bar{\delta}(x) - \bar{\delta}(y) \\ &\quad = (1 + pu)(x - y) \pmod{p^{r-s+1}} \end{aligned} \tag{30}$$

äquivalent. Insbesondere ist $\bar{\delta}(x) = \bar{\delta}(y)$ falls $x \equiv y \pmod{p^{r-s+1}}$, sodaß $\bar{\delta}$ als Abbildung von $\mathbf{Z}/p^{r-s+1}\mathbf{Z}$ in sich selbst betrachtet werden kann, und nach (30) ist diese Abbildung sogar eine Dilatation aus $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$. Wegen $\delta(x) \equiv x \pmod{p^s}$ und (29) gilt $\bar{\delta}(x) \equiv x \pmod{p}$, d.h. $\bar{\delta}$ liegt im Kern der im Beweis von Satz 7 konstruierten Abbildung $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Umgekehrt definiert jedes $\bar{\delta} \in \tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$ mit $\delta(x) \equiv x \pmod{p}$ durch

$$\delta(x) = x + p^{s-1}(\bar{\delta}(x) - x)$$

eine Dilatation aus $\operatorname{Ker} \psi$, also

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \psi &\cong \operatorname{Ker}\big(\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\big) \underset{(24)}{\cong} \Delta(p^{r-s}, p)^p \\ &\underset{(18)}{\cong} \big(\underbrace{(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \wr \ldots \wr (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}_{r-s+1 \text{ mal}}\big)^p\,. \end{aligned}$$

Da $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s) \subset \operatorname{Ker} \psi$ unter $\delta \mapsto \bar{\delta}$ den homogenen Dilatationen von $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$ entspricht, ist (26) eine unmittelbare Folge von (19).

Die Gruppenerweiterung (25) können wir leicht beschreiben: Die Gruppe $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ ist das Produkt des Normalteilers $\operatorname{Ker} \psi$ und der zu $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ isomorphen Gruppe der Translationen, welche durch Reduktion $\pmod{p^s}$ surjektiv auf die Gruppe $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ in (25) abgebildet werden; die Translationen $x \mapsto x + p^s a$, die bei dieser Projektion auf 0 gehen, operieren auf $\operatorname{Ker} \psi \cong \tilde{\Delta}(p^{r-s}, p)^p$ durch die entsprechenden Translationen $x \mapsto x + a$ in $\tilde{\Delta}(p^{r-s}, p)$.

Wir behandeln nun den Fall unendlichen Exponents. Wir bezeichnen mit $\mathbf{Z}/p^\infty$ die Gruppe $\varinjlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (also die p-Komponente von $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$) und mit $\mathbf{Z}_p^*$ die Gruppe der p-adischen Einheiten.

SATZ 9. *Sei G eine abelsche p-Gruppe unendlichen Exponents. Falls $G \cong \mathbf{Z}/p^\infty$, so ist*

$$\Delta_0(G) \cong \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \dots .$$

Falls $G \cong \mathbf{Z}/p^\infty \oplus G'$ mit $G' \neq \{0\}$ eine Gruppe von endlichem Exponent p^s, so ist $\Delta_0(G)$ isomorph einer nur von p^s abhängigen Gruppe $\Delta_0(p^\infty, p^s)$ mit

$$1 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \dots)^{p-1} \to \Delta_0(p^\infty, p^s) \to (\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})^* \to 1 .$$

In allen anderen Fällen ist $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}_p^*$.

Beweis. Aus der Theorie der abelschen Gruppen (siehe etwa das Buch von Kaplansky) folgt, daß G entweder einen direkten Summanden $\mathbf{Z}/p^\infty$ hat oder reduziert ist (d.h. keine dividierbare Gruppe enthält), wobei G im letzteren Fall zyklische Summanden beliebig hoher Ordnung hat. Es gibt also drei Fälle zu unterscheiden:

i) $G = \mathbf{Z}/p^\infty \oplus G'$ mit $\exp(G') = p^s < \infty$,

ii) $G = \mathbf{Z}/p^\infty \oplus G'$ mit $\exp(G') = \infty$,

iii) G reduziert, $\exp(G) = \infty$.

Nach Bemerkung 1 zu Satz 5 ist $\Delta_0(G) \cong \varprojlim \Delta_0(G[p^t])$. Für t genügend groß ist die Gruppe $G[p^t]$ im Falle i) zu $\mathbf{Z}/p^tZ \oplus G'$ isomorph und in den Fällen ii) und iii) zu $\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus G''$ mit $\exp(G'') \leqq p^t$. Die Behauptung des Satzes folgt jetzt aus den Sätzen 5, 6 und 8.

Mit diesem Satz haben wir die Berechnung der Dilatationsgruppen aller abelschen p-Gruppen und damit aller abelschen Gruppen abgeschlossen.

(Reçu le 4 août 1977)

S. Suter
D. Zagier

Mathematisches Institut
der Universität Bonn (BRD)