

## II. Dilatationen von Gruppen

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## II. DILATATIONEN VON GRUPPEN

In Kapitel I wurde eine Dilatation einer Kongruenzklassengeometrie als eine Abbildung  $\delta$  der Geometrie definiert, die Unterräume in parallele Unterräume überführt. Für Gruppengeometrien bedeutet das, daß  $\delta$  jede Nebenklasse von jedem Normalteiler von  $G$  in eine Nebenklasse desselben Normalteilers überführt. Wir betrachten ab jetzt nur die bijektiven Dilatationen, d.h. die Bijektionen  $\delta: G \rightarrow G$  mit der Eigenschaft

$$(1) \quad xy^{-1} \in N \Leftrightarrow \delta(x) \delta(y)^{-1} \in N \quad (N \triangleleft G, x, y \in G).$$

Wir bezeichnen mit  $\Delta(G)$  die Gruppe der Dilatationen und mit  $\Delta_0(G) = \{ \delta \in \Delta(G) \mid \delta(e) = e \}$  die Untergruppe der *homogenen* Dilatationen.

Die Dilatationen  $\delta: G \rightarrow G$  werden auch dadurch charakterisiert, daß es für jeden Epimorphismus  $\pi: G \rightarrow G'$  eine Permutation  $\delta'$  von  $G'$  mit

$$(2) \quad \delta' \circ \pi = \pi \circ \delta$$

gibt. Offenbar ist  $\delta'$  durch  $\delta$  eindeutig bestimmt und ist eine Dilatation von  $G'$ . Sei  $\Delta(\pi)$  der Homomorphismus  $\Delta(G) \rightarrow \Delta(G')$ , der  $\delta$  auf  $\delta'$  schickt; dann wird  $\Delta$  zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen und Epimorphismen in die Kategorie der Gruppen. Entsprechend haben wir den Unterfunctor  $\Delta_0(\pi): \Delta_0(G) \rightarrow \Delta_0(G')$ . Wenn  $N$  ein Normalteiler von  $G$  ist, dann liefert die Beschränkungsabbildung  $\delta \mid N, \delta \in \Delta_0(G)$ , einen Homomorphismus  $\Delta_0(G) \rightarrow \Delta_0(N)$  (aber keinen Funktor).

Beispiele von nicht-homogenen Dilatationen sind die Links- und Rechts-translationen

$$l(g): x \mapsto gx, \quad r(g): x \mapsto xg \quad (x, g \in G).$$

Beispiele von homogenen Dilatationen sind die Abbildung

$$(3) \quad \iota: x \rightarrow x^{-1} \quad (x \in G)$$

mit  $\iota^2 = 1$ ,  $\iota l(g^{-1}) \iota = r(g)$ , sowie die inneren Automorphismen  $l(g) r(g)^{-1}$  ( $g \in G$ ). Im allgemeinen gilt weder  $\text{Aut}(G) \subset \Delta_0(G)$  noch  $\Delta_0(G) \subset \text{Aut}(G)$ . Folgender Satz gibt Auskunft über die Beziehung zwischen  $\Delta_0(G)$  und  $\Delta(G)$ .

**SATZ 1.** Die Gruppe  $l(G)$  der Linkstranslationen und die Gruppe  $\Delta_0(G)$  der homogenen Dilatationen sind in  $\Delta(G)$  komplementär, d.h.  $l(G) \Delta_0(G) = \Delta(G)$ ,  $l(G) \cap \Delta_0(G) = \{1\}$ . Insbesondere ist  $\Delta(G)$

als Menge zu  $G \times \Delta_0(G)$  isomorph. Die folgenden Bedingungen für  $G$  sind äquivalent:

- a)  $l(G) \triangleleft \Delta(G)$ ,
- b)  $r(G) \triangleleft \Delta(G)$ ,
- c)  $\Delta_0(G) \subset \text{Aut}(G)$ .

Falls diese Bedingungen gelten, ist  $\Delta(G)$  isomorph zum semidirekten Produkt  $G \rtimes \Delta_0(G)$ . Die Gruppe  $G$  ist dann notwendigerweise abelsch.

*Beweis.* Jede Dilatation  $\delta \in \Delta(G)$  hat eine (offenbar eindeutige) Zerlegung als Produkt einer Linkstranslation und einer homogenen Dilatation, nämlich  $\delta = l(\delta(e)) \cdot f(\delta)$  mit  $f(\delta) = l(\delta(e)^{-1}) \delta \in \Delta_0(G)$ . Man verifiziert leicht, daß die Bedingungen a), b), c) und die Bedingung, daß  $f: \Delta(G) \rightarrow \Delta_0(G)$  ein Homomorphismus ist, jeweils zu der Formel

$$\delta(xy) = \delta(x) \delta(e)^{-1} \delta(y) \quad (\forall x, y \in G, \delta \in \Delta_0(G))$$

äquivalent sind. Falls diese Bedingungen gelten, ist die Folge

$$1 \rightarrow G \xrightarrow{l} \Delta(G) \xrightarrow{f} \Delta_0(G) \rightarrow 1$$

exakt und stellt  $\Delta(G)$  als semidirektes Produkt von  $G$  und  $\Delta_0(G)$  dar. Schließlich liegt das Element  $\iota$  von  $\Delta_0(G)$  nur dann in  $\text{Aut}(G)$ , wenn  $G$  abelsch ist, so daß die letzte Behauptung des Satzes aus c) folgt.

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Dilatationen von Gruppen, die als Vereinigung von Normalteilern, als direkte Summe oder als Gruppenerweiterung dargestellt sind. Alle drei Teile werden für die Bestimmung der Dilatationsgruppen abelscher Gruppen benötigt werden.

**SATZ 2.** a) Sei  $G$  eine Gruppe,  $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G$  eine Folge von Normalteilern mit  $G = \bigcup G_n$  und  $\Delta_0(G_1) \leftarrow \Delta_0(G_2) \leftarrow \dots$  das durch die Beschränkungsabbildungen gegebene inverse System. Dann liefern die Beschränkungsabbildungen  $\Delta_0(G) \leftarrow \Delta_0(G_n)$  einen natürlichen Isomorphismus  $p: \Delta_0(G) \rightarrow \varprojlim_n \Delta_0(G_n)$ .

b) Sei  $G = \bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}$  eine direkte Summe und  $\pi_{\alpha}: G \rightarrow G_{\alpha}$  die Projektionen. Dann ist jedes  $\delta \in \Delta(G)$  gleich dem Produkt der Dilatationen  $\delta_{\alpha} = \Delta(\pi_{\alpha}) \delta \in \Delta(G_{\alpha})$ . Insbesondere sind die Homomorphismen  $\Pi \Delta(\pi_{\alpha}): \Delta(G) \rightarrow \Pi \Delta(G_{\alpha})$  und  $\Pi \Delta_0(\pi_{\alpha}): \Delta_0(G) \rightarrow \Pi \Delta_0(G_{\alpha})$  injektiv.  $\alpha$

c) Sei  $1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$  eine exakte Folge von Gruppen. Dann gibt es einen (nicht-natürlichen) injektiven Homomorphismus  $\Delta(G) \hookrightarrow \Delta(N)$

$\wr \Delta(Q)$ , wobei  $\Delta(N) \wr \Delta(Q) = \Delta(N)^{\mathcal{Q}} \times \Delta(Q)$  das durch die Operation von  $\Delta(Q)$  auf  $Q$  definierte Kranzprodukt ist.

*Beweis.* a) Wir haben  $p(\delta) = (\delta \upharpoonright G_n)_{n=1}^{\infty}$ . Es ist klar, daß  $p$  wohldefiniert und injektiv ist. Für die Surjektivität definiere man ein Urbild von  $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$  durch  $\delta(x) = \delta_n(x)$ , wo  $n = n(x)$  ein beliebiger Index mit  $x \in G_n(x)$  ist. Diese Operation von  $\delta$  hängt nicht von  $n$  ab; weiter ist klar, daß  $\delta$  bijektiv ist, und schließlich ist mit  $xy^{-1} \in N$ ,  $N$  ein beliebiger Normalteiler von  $G$ , auch  $\delta(x)\delta(y)^{-1} \in N$ , denn für ein geeignetes  $n$  gilt  $x, y \in G_n$  und somit  $xy^{-1} \in N \cap G_n$ ,  $\delta(x)\delta(y)^{-1} = \delta_n(x)\delta_n(y)^{-1} \in N \cap G_n \subset N$ .

b) folgt aus der Formel  $\pi_{\alpha}\delta = \delta_{\alpha}\pi_{\alpha}$  (Gleichung (2)). Wir bemerken, daß für  $\delta \in \Delta_0(G)$  die Dilatation  $\delta_{\alpha}$  mit der Beschränkung  $\delta \upharpoonright G_{\alpha}$  übereinstimmt.

c) Für jedes  $q \in Q$  wählen wir ein Element  $x_q \in \pi^{-1}(q)$  als Vertreter für die Nebenklassen in  $G/N$ . Sei  $\delta \in \Delta(G)$  und sei  $\delta' \in \Delta(Q)$  das Bild von  $\delta$  unter  $\Delta(\pi)$ . Dann bildet  $\delta$  die Nebenklasse  $x_q N$  auf  $x_{\delta'(q)} N$  ab, so daß wir durch die Formel  $\delta(x_q n) = x_{\delta'(q)} \delta_q(n)$  ( $q \in Q, n \in N$ ) eine Abbildung  $\delta_q: N \rightarrow N$  definieren können. Man sieht sofort, daß  $\delta_q$  eine Dilatation von  $N$  ist und daß  $\delta$  durch die Dilatationen  $\delta'$  und  $\delta_q$  ( $q \in Q$ ) bestimmt wird. Somit haben wir eine injektive Abbildung von  $\Delta(G)$  nach  $\Delta(N)^{\mathcal{Q}} \times \Delta(Q)$ . Man prüft sofort nach, daß diese Abbildung ein Homomorphismus wird, wenn man die Menge  $\Delta(N)^{\mathcal{Q}} \times \Delta(Q)$  mit der Gruppenstruktur des Kranzproduktes  $\Delta(N) \wr \Delta(Q)$  versieht.

Ab jetzt betrachten wir nur abelsche Gruppen und schreiben entsprechend die Gruppenoperation additiv. Dann läßt sich die Bedingung, daß eine bijektive Abbildung  $\delta: G \rightarrow G$  eine Dilatation ist, folgendermaßen schreiben:

$$(4) \quad \langle x - y \rangle = \langle \delta x - \delta y \rangle \quad (\forall x, y \in G).$$

( $\langle \rangle$  bedeutet Erzeugnis.) Gleichwertig hiermit ist die Bedingung: für alle  $x, y \in G$  gibt es eine Zahl  $m = m_{xy} \in \mathbf{Z}$ , sodaß

$$(5) \quad \delta(x) - \delta(y) = m(x - y) \quad \text{und} \quad (m, o(x - y)) = 1.$$

Hierbei bezeichnet  $o(x)$  die Ordnung von  $x$  mit der Konvention  $o(x) = 0$  für Elemente unendlicher Ordnung und  $(m, 0) = |m|$ . Für homogene Dilatationen  $\delta$  folgt hieraus mit  $y = 0$ , daß es für alle  $x \in G$  ein  $m_x \in \mathbf{Z}$  gibt mit

$$(6) \quad \delta(x) = m_x x \quad (m_x, o(x)) = 1.$$

Für ein Element  $x$  unendlicher Ordnung ist  $m_x = \pm 1$ ; für Torsions-  
elemente  $x$  ist  $m_x$  nur mod  $o(x)$  bestimmt. Für jedes  $x \in G$  definiert die  
Abbildung  $\delta \mapsto m_x$  einen Homomorphismus  $\Delta_0(G) \rightarrow (\mathbf{Z}/o(x)\mathbf{Z})^*$ . Wir  
nennen zwei Elemente  $x, y \in G$  *linear unabhängig*, falls  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$   
 $= \{0\}$ . Aus (5) und (6) folgt leicht die nützliche Bedingung

$$(7) \quad x, y \text{ linear unabhängig} \Rightarrow m_x \equiv m_y \pmod{(o(x), o(y))}.$$

*Beispiel.* Sei  $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$ ,  $p$  eine Primzahl,  $r \geq 2$ . Dann ist  $\Delta_0(G)$   
 $\cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ : Je zwei Elemente  $x, y$  aus  $G$  lassen sich durch eine Kette linear  
unabhängiger Elemente verbinden, und die haben alle die Ordnung  $p$ .  
Dabei ist für  $\delta \in \Delta_0(G)$   $n_x \equiv n_y \pmod{p}$ , also hat jede Dilatation  $\delta \in \Delta_0(G)$   
die Gestalt  $x \mapsto nx$ ,  $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Dagegen ist für  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  die Dilatations-  
gruppe viel größer: für  $x \neq y$  ist Bedingung (4) leer, da  $x - y$  invertierbar  
ist, also  $\Delta(G) \cong \mathfrak{S}_p$  (symmetrische Gruppe auf  $p$  Buchstaben),  $\Delta_0(G)$   
 $\cong \mathfrak{S}_{p-1}$ . Wir bemerken, daß wir hiermit auch Beispiele abelscher Gruppen  
bekommen, wo die Bedingungen von Satz 1 erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

Mit Hilfe von (5) können wir leicht  $\Delta_0(G)$  für alle abelschen Gruppen  
berechnen, die keine Torsionsgruppen sind.

**SATZ 3.** *Sei  $G$  eine abelsche Gruppe, die ein Element unendlicher  
Ordnung enthält. Dann gilt  $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $\Delta(G) \cong G \rtimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ , wobei  
die Operation des nicht-trivialen Elements von  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  auf  $G$  durch  $x \rightarrow -x$   
gegeben wird.*

*Beweis.* Die Formel für  $\Delta(G)$  folgt wegen Satz 1 aus der Beziehung  
 $\Delta_0(G) = \{\pm 1\}$ , die wir erst für zwei Spezialfälle beweisen.

*Fall 1.*  $G = \mathbf{Z}$ .

Für  $\delta \in \Delta_0(\mathbf{Z})$  wissen wir, daß  $\delta(x) = \pm x$  für jedes  $x \in \mathbf{Z}$ . Insbesondere  
ist  $\delta(1) = \pm 1$ . Ist etwa  $\delta(1) = +1$ , so folgt aus (5)

$$\delta(x) - 1 = \delta(x) - \delta(1) = \pm(x - 1)$$

für jedes  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $x \neq 1$ , also

$$\delta(x) \in \{x, -x\} \cap \{1 + (x - 1), 1 - (x - 1)\} = \{x\}$$

d.h.  $\delta = id$ . Entsprechend ist  $\delta = -id$ , falls  $\delta(1) = -1$ .

*Fall 2.*  $G = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  oder  $G = \mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})$ .

Sei  $x = (1, 0)$  und  $\delta \in \Delta_0(G)$ . Indem wir notfalls  $\delta$  durch  $-\delta$  ersetzen,  
können wir annehmen, daß  $\delta(x)$  gleich  $+x$  ist. Sei nun  $y = (a, b) \in G$   
beliebig. Wir wollen zeigen, daß  $\delta(y) = y$ . Dies gilt nach Fall 1, falls

$b = 0$ , und nach (7), falls  $a = 0$ . Sind  $a$  und  $b$  von Null verschieden, so setzen wir  $z = (a, 0)$ . Dann gilt wegen  $\delta(z) = z$  und (5)

$$\delta(y) = m(y - z) + \delta(z) = m(y - z) + z = (a, mb)$$

für ein geeignetes  $m \in \mathbf{Z}$ . Andererseits ist aber  $\delta(y) = \pm y$ , da wegen  $a \neq 0$  das Element  $y$  unendliche Ordnung hat. Hieraus folgt  $\delta(y) = +y$ ,  $\delta = id$ . Ist nun  $G$  eine beliebige abelsche Gruppe,  $x \in G$  ein festes Element unendlicher Ordnung und  $\delta \in \Delta_0(G)$  eine Dilatation mit (o.B.d.A.)  $\delta(x) = +x$ , so muß  $\delta(y) = y$  für jedes  $y \in G$  sein, da die von  $x$  und  $y$  erzeugte Untergruppe isomorph  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  oder  $\mathbf{Z} \oplus r\mathbf{Z}$  ist und die Beschränkung von  $\delta$  auf diese Untergruppe nach dem bereits Bewiesenen gleich der Identität.

Für abelsche Torsionsgruppen lassen sich  $\Delta$  und  $\Delta_0$  auf natürliche Weise zerlegen:

**SATZ 4.** Sei  $G$  eine abelsche Torsionsgruppe,  $G \cong \bigoplus_p G_p$  ihre kanonische Zerlegung in  $p$ -primäre Gruppen  $G_p$ . Dann ist  $\Delta(G) \cong \prod_p \Delta(G_p)$  und  $\Delta_0(G) \cong \prod_p \Delta_0(G_p)$ .

*Beweis.* Wegen Satz 2 b) bleibt nur zu zeigen, daß der Homomorphismus  $\prod_p \Delta(\pi_p): \Delta(G) \rightarrow \prod_p \Delta(G_p)$  surjektiv ist. Sei  $(\delta_2, \delta_3, \delta_5, \dots) \in \prod_p \Delta(G_p)$ . Die Abbildung  $x = x_2 + \dots + x_p \mapsto \delta_2(x_2) + \dots + \delta_p(x_p)$  ist eine Dilatation, denn für  $x = x_2 + \dots + x_r$ ,  $y = y_2 + \dots + y_s \in G$  gibt es  $n_p \in \mathbf{Z}$  ( $p = 2, 3, \dots, \max\{r, s\}$ ), sodaß  $\delta_p(x_p) - \delta_p(y_p) = n_p(x_p - y_p)$  und  $n_p$  invertierbar mod  $(o(x_p - y_p))$ , und dann gibt es wegen der Teilerfremdheit der  $o(x_p - y_p)$  eine zu  $o(x - y)$  teilerfremde Zahl  $n \in \mathbf{Z}$  mit  $n \equiv n_p \pmod{(o(x_p - y_p))}$  für alle  $p$ . Somit ist  $\delta$  Dilatation und offenbar ein Urbild von  $(\delta_2, \delta_3, \dots)$ . Die Behauptung für  $\Delta_0$  folgt ähnlich.

Die Berechnung von  $\Delta(G)$  und  $\Delta_0(G)$  für abelsche Gruppen  $G$  wird durch die Sätze 3 und 4 auf die Berechnung von  $\Delta(G_p)$  bzw.  $\Delta_0(G_p)$  für  $p$ -primäre Gruppen  $G_p$  reduziert, die wir im nächsten Kapitel durchführen. Zuvor beweisen wir jedoch einen Satz über abelsche Gruppen von endlichem Exponent.

Sei  $G$  eine Gruppe mit endlichem Exponent  $e$ . Wir können  $G$  in der Gestalt  $G = (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$  schreiben und setzen  $f = \text{Exp}(G')$ . Die Zahlen  $e$  und  $f$  werden wir „die beiden größten (ersten) Torsionskoeffizienten von  $G$ “ nennen (in Übereinstimmung mit der Terminologie für endliche abelsche Gruppen). Unser Hauptresultat über Gruppen endlichen Exponents ist, daß ihre homogenen Dilatationsgruppen nur von diesen beiden ersten Torsionskoeffizienten abhängen.

SATZ 5. Sei  $G$  eine Gruppe von endlichem Exponent  $e$ ,  $G = (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$ ,  $\text{Exp}(G') = f$ ,  $\pi: G \rightarrow G'$  die Projektion. Dann gilt:

- i) Das Bild des Homomorphismus  $\Delta_0(\pi): \Delta_0(G) \rightarrow \Delta_0(G')$  besteht aus allen Dilatationen von  $G'$  der Gestalt  $x \mapsto mx$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ,  $(m, f) = 1$ ) und ist somit zu  $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$  isomorph.
- ii) Der Beschränkungshomomorphismus  $\Delta_0(G) \rightarrow \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$  ist injektiv. Sein Bild ist die nur von  $e$  und  $f$  abhängige Gruppe

$$\Delta_0(e, f) = \{ \delta \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \mid \exists m \in \mathbf{Z}, (m, f) = 1, \text{ soda\ss es f\"ur alle } x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \text{ ein } n \in \mathbf{Z} \text{ gibt mit } \delta(x) - \delta(y) = n(x - y) \text{ und } n \equiv m \pmod{f} \}.$$

Diese Gruppe ist eine Erweiterung

$$(8) \quad 1 \rightarrow \tilde{\Delta}_0(e, f) \rightarrow \Delta_0(e, f) \rightarrow (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^* \rightarrow 1,$$

wobei

$$\tilde{\Delta}_0(e, f) = \{ \delta \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \mid \text{f\"ur alle } x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \text{ gibt es ein } n \equiv 1 \pmod{f} \text{ mit } \delta(x) - \delta(y) = n(x - y) \}.$$

*Beweis.* Nach Satz 2 b) hat jede Dilatation  $\delta \in \Delta_0(G)$  die Gestalt  $\delta_1 \times \delta_2$  mit  $\delta_1 \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$ ,  $\delta_2 \in \Delta_0(G')$ . Sei  $a \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$  eine Erzeugende. Dann gibt es nach (6) eine Zahl  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $(m, e) = 1$ , mit  $\delta_1(a) = ma$ , und nach (7) gilt dann  $\delta_2(x) = mx$  f\"ur alle  $x \in G'$ , da die Elemente aus  $\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$  und  $G'$  in  $G$  linear unabh\"angig sind. Hieraus folgt bereits, da\ss die Dilatation  $\delta_2 = \Delta_0(\pi) \delta$  die Gestalt  $x \mapsto mx$  f\"ur eine geeignete zu  $f$  teilerfremde Zahl  $m \in \mathbf{Z}$  hat, und auch, da\ss die Dilatation  $\delta$  durch  $\delta_1$  vollst\"andig bestimmt wird, d.h.  $\Delta_0(G) \hookrightarrow \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$ . Behauptung i) ist jetzt klar, denn f\"ur jedes  $m \in \mathbf{Z}$  mit  $(m, f) = 1$  ist die Multiplikation mit  $n$ , wenn  $(n, e) = 1$  und  $n \equiv m \pmod{f}$ , eine Dilatation von  $G$ , deren Beschr\"ankung auf  $G'$  die Multiplikation mit  $m$  ist.

Wir m\"ussen noch das Bild von  $\Delta_0(G)$  in  $\Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$  bestimmen, d.h. untersuchen, f\"ur welche Dilatationen  $\delta_1 \in \Delta_0(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})$  die Abbildung  $\delta_1 \times \delta_2$ , wo  $\delta_2$  Multiplikation mit einer zu  $f$  teilerfremden Zahl  $m$  ist, eine Dilatation ist. Nach (5) ist daf\"ur notwendig und hinreichend, da\ss es f\"ur alle  $x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$ ,  $x', y' \in G'$ , eine Zahl  $n \in \mathbf{Z}$  mit

$$(\delta_1(x) - \delta_1(y), \delta_2(x') - \delta_2(y')) = n(x - y, x' - y'),$$

d.h. mit

$$\delta_1(x) - \delta_1(y) = n(x - y), \quad m(x' - y') = n(x' - y')$$

gibt. Da die letzte Gleichung genau dann für alle  $x', y' \in G'$  gilt, wenn  $n \equiv m \pmod{f}$ , ist diese Bedingung mit  $\delta_1 \in \Delta_0(e, f)$  äquivalent.

*Bemerkungen.* 1. Satz 5 enthält eine implizite Beschreibung von  $\Delta_0(G)$  für alle abelschen Gruppen  $G$ . Denn wenn  $G$  keine Torsionsgruppe ist, ist  $\Delta_0(G)$  nach Satz 3 zu  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  isomorph. Ist  $G$  aber eine Torsionsgruppe, dann läßt sich  $G$  als Vereinigung von Gruppen endlichen Exponents darstellen,  $G = \bigcup_{N=1}^{\infty} G[N]$  mit  $G[N] = \{g \in G \mid Ng = 0\}$ , und nach Satz 2 a) gilt

$$(9) \quad \Delta_0(G) = \varprojlim_N \Delta_0(G[N]).$$

2. Nach Satz 4 ist  $\Delta_0(e, f) = \prod \Delta_0(p_i^{r_i}, p_i^{s_i})$ , falls  $e = \prod p_i^{r_i}, f = \prod p_i^{s_i}$  mit  $p_i$  prim,  $r_i \geq s_i \geq 0$  ist. Somit genügt es, die Gruppen  $\Delta_0(p^r, p^s)$  zu berechnen.

3. Obwohl die Sequenz (8) i.a. nicht spaltet, ist es für die Berechnung von  $\Delta_0(e, f)$  hinreichend, wenn wir die Gruppe  $\tilde{\Delta}_0(e, f)$  kennen. Denn  $\Delta_0(e, f)$  ist das Produkt des Normalteilers  $\tilde{\Delta}_0(e, f)$  und der zu  $(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})^*$  isomorphen Untergruppe der Multiplikationen (da letztere sich surjektiv auf  $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$  abbildet), und wir kennen den Durchschnitt der beiden Untergruppen sowie die Operation der Multiplikationen auf  $\tilde{\Delta}_0(e, f)$ .

4. Schließlich hat man (analog zu Satz 5) für die gesamte Dilatationsgruppe von  $G = (\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$  die exakte Sequenz

$$(10) \quad 1 \rightarrow \tilde{\Delta}(e, f) \rightarrow \Delta(G) \rightarrow G' \times (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^* \rightarrow 1,$$

wobei

$$(11) \quad \tilde{\Delta}(e, f) = \{ \delta \in \Delta(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \mid \forall x, y \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \exists n \equiv 1 \pmod{f} \text{ mit } \delta(x) - \delta(y) = n(x - y) \}.$$

Denn wenn  $\delta = \delta_1 \times \delta_2$  eine Dilatation auf  $(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}) \oplus G'$  ist mit  $\delta_1(1) - \delta_1(0) = n$ , so gilt für  $\delta_2$  die Beziehung

$$\delta_2(x) - \delta_2(y) = n(x - y) \quad (\forall x, y \in G')$$

(Anwendung von (7) auf die Elemente  $(1, x)$  und  $(0, y)$ ). Mit anderen Worten:  $\delta_2$  liegt in der zu  $G' \times (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$  isomorphen Gruppe der „affinen“ Dilatationen  $x \mapsto mx + a$  ( $m \in (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*, a \in G'$ ) und  $\delta_1$  liegt, falls  $\delta_2$



(oder auch nur das Bild von  $\delta_2$  in  $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$ ) trivial ist, in  $\tilde{\Delta}(e, f)$ . Die Bemerkungen 1.—3. gelten ebenso für nicht-homogene Dilatationen, sodaß wir die Bestimmung von  $\Delta(G)$  für beliebige abelsche Gruppen auf die Bestimmung von  $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$  zurückgeführt haben.

Wir müssen also nur noch die Gruppen  $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$  und  $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$  berechnen, was im nächsten Kapitel geschieht.

### III. DILATATIONSGRUPPEN VON ENDLICHEN ABELSCHEN $p$ -GRUPPEN

Seien  $p$  eine Primzahl und  $r \geq s \geq 0$  ganze Zahlen. In diesem Kapitel wollen wir die Gruppen  $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$  und  $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$  berechnen. Da diese Gruppen Untergruppen von  $\Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$  bzw. von  $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$  sind, behandeln wir zunächst den Spezialfall  $s = 0$ .

SATZ 6. a) Die Dilatationsgruppe der zyklischen Gruppe  $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$  ist zum  $r$ -fachen Kranzprodukt der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_p$  isomorph,

$$(12) \quad \Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong \underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p}_{r \text{ mal}},$$

wo das Kranzprodukt von einer Gruppe  $H$  mit  $\mathfrak{S}_p$  durch die Operation von  $\mathfrak{S}_p$  als Permutationsgruppe von  $p$  Elementen gegeben wird, d.h.  $H \wr \mathfrak{S}_p = \underbrace{(H \times \dots \times H)}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathfrak{S}_p$ . Insbesondere gilt

$$(13) \quad |\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}} = p^{(p^r-1)/(p-1)}.$$

b) Die homogene Dilatationsgruppe von  $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$  wird gegeben durch

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong & \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \dots \\ & \times \underbrace{(\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1})}_{r-1 \text{ mal}} \end{aligned}$$

und hat die Ordnung  $p^{(p^r-1)/(p-1)}/p^r$ .

*Beweis.* Wir werden  $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$  induktiv bestimmen, indem wir die Gruppe  $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$  in Nebenklassen nach der Untergruppe  $p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$  zerlegen. Nach Satz 4 c) mit  $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ ,  $N = p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$  und  $Q = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  gibt es einen injektiven Homomorphismus