III. DILATATIONSGRUPPEN VON ENDLSICHEN ABELSCHEN p-GRUPPEN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

(oder auch nur das Bild von δ_2 in $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$) trivial ist, in $\tilde{\Delta}(e,f)$. Die Bemerkungen 1.—3. gelten ebenso für nicht-homogene Dilatationen, sodaß wir die Bestimmung von $\Delta(G)$ für beliebige abelsche Gruppen auf die Bestimmung von $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ zurückgeführt haben.

Wir müssen also nur noch die Gruppen $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$ und $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ berechnen, was im nächsten Kapitel geschieht.

III. Dilatationsgruppen von endlsichen abelschen p-Gruppen

Seien p eine Primzahl und $r \geqq s \geqq 0$ ganze Zahlen. In diesem Kapitel wollen wir die Gruppen $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$ und $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ berechnen. Da diese Gruppen Untergruppen von $\Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ bzw. von $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ sind, behandeln wir zunächst den Spezialfall $s = 0$.

Satz 6. a) *Die Dilatationsgruppe der zyklischen Gruppe* $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ *ist zum r-fachen Kranzprodukt der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_p$ *isomorph,*

$$\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong \underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p}_{r \text{ mal}}, \tag{12}$$

wo das Kranzprodukt von einer Gruppe H *mit* $\mathfrak{S}_p$ *durch die Operation von* $\mathfrak{S}_p$ *als Permutationsgruppe von* p *Elementen gegeben wird, d.h.* $H \wr \mathfrak{S}_p = \underbrace{(H \times \dots \times H)}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathfrak{S}_p$. *Insbesondere gilt*

$$|\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})| = p!^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}} = p!^{(p^r-1)/(p-1)}. \tag{13}$$

b) *Die homogene Dilatationsgruppe von* $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ *wird gegeben durch*

$$\Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \dots \times (\underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p}_{r-1 \text{ mal}} \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \tag{14}$$

und hat die Ordnung $p!^{(p^r-1)/(p-1)}/p^r$.

Beweis. Wir werden $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ induktiv bestimmen, indem wir die Gruppe $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ in Nebenklassen nach der Untergruppe $p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ zerlegen. Nach Satz 4 c) mit $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$, $N = p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ und $Q = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ gibt es einen injektiven Homomorphismus

(15) $\quad \varphi : \Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \hookrightarrow \Delta(N) \underset{Q}{\wr} \Delta(Q) = \Delta(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z})^p \rtimes \mathfrak{S}_p,$

wobei wir benutzt haben, daß $\Delta(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \cong \mathfrak{S}_p$. Die Abbildung φ wird wie folgt explizit beschrieben: Wir schreiben $G = \bigcup_{j=0}^{p-1} L_j$ mit $L_j = \{ x \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z} \mid x \equiv j \pmod{p} \}$ $(j=0, 1, \ldots, p-1)$. Jedes L_j können wir vermöge $x \mapsto \dfrac{x-j}{p}$ $(\bmod\, p^{r-1})$ mit $\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}$ identifizieren. Jede Dilatation $\delta \in \Delta(G)$ permutiert einerseits die Restklassen L_j und induziert somit eine Permutation δ' von $\{0, 1, \ldots, \mathrm{p}-1\}$, andererseits induziert δ vermöge der Identifikation der L_j mit $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ Dilatationen $\delta_0, \ldots, \delta_{p-1} \in \Delta(N)$, die durch die Formel

(16) $\quad \delta(j+ap) = \delta'(j) + \delta_j(a) \cdot p \qquad (j \in \{0, \ldots, p-1\},\ a \in N)$

definiert werden. Die Abbildung φ wird dann durch $\delta \mapsto ((\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}), \delta')$ gegeben.

Wir wollen zeigen, daß φ surjektiv ist. Seien $\delta' \in \mathfrak{S}_p$ und p Dilatationen $\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}$ von $\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}$ gegeben. Dann wird durch (16) eine bijektive Abbildung δ von G auf sich definiert. Wir müssen zeigen, daß δ die Gleichung (5) für alle $x, y \in G$ erfüllt. Sind x und y modulo p kongruent, so gibt es ein $j \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit $x = j + pa$, $y = j + pb$ und, wegen der dilatativen Eigenschaft von δ_j, eine zu p teilerfremde Zahl $n \in Z$ mit $\delta_j(a) - \delta_j(b) = n(a-b)$. Dann ist

$$\delta(x) - \delta(y) = [\delta'(j) + p\,\delta_j(a)] - [\delta'(j) + p\,\delta_j(b)] = n(x-y).$$

Sind x und y verschieden modulo p, so sind $\delta(x)$ und $\delta(y)$ auch modulo p verschieden (da δ' eineindeutig ist) und die Bedingung (5) ist automatisch erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ zu $\Delta(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \wr \mathfrak{S}_p$ isomorph ist, woraus (12) durch Induktion über r folgt.

b) Sei $\delta \in \Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ mit $\varphi(\delta) = ((\delta_0, \ldots, \delta_{p-1}), \delta')$. Wegen (16) ist δ genau dann homogen, wenn δ' und δ_0 homogen sind. Wir können dann δ' als Permutation von $\{1, \ldots, p-1\}$ auffassen und erhalten durch $\varphi(\delta) \mapsto \delta_0 \times ((\delta_1, \ldots, \delta_{p-1}), \delta')$ den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \Delta_0(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \times [\Delta(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \wr \mathfrak{S}_{p-1}] \\ &\cong \Delta_0(\mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}) \times (\underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \ldots \wr \mathfrak{S}_p}_{r-1 \text{ mal}} \wr \mathfrak{S}_{p-1}), \end{aligned}$$

woraus (14) durch Induktion über r folgt.

Der Fall $s > 0$ sieht ganz anders aus. Ein Grund hierfür ist, daß die definierende Eigenschaft dieser Gruppen, nämlich

$$(17) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\ \exists\, u \in \mathbf{Z} \quad \text{mit} \quad \delta(x) - \delta(y) = (1 + p^s u)(x - y)$$

die Bedingung (5) impliziert, sodaß die Abbildungen δ, die (17) genügen, automatisch bijektive Dilatationen sind.

Satz 7. *Sei p eine Primzahl, $r \geqq 1$. Dann gilt*

$$(18) \qquad \tilde{\Delta}(p^r, p) \cong \underbrace{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \dots \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}_{r \text{ mal}}$$

$$(19) \qquad \tilde{\Delta}_0(p^r, p) \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \dots \times \underbrace{(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \dots \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}_{r-1 \text{ mal}})^{p-1},$$

wobei das Kranzprodukt von einer Gruppe H mit $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ durch die Operation von $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ als zyklische Permutationsgruppe auf p Elementen gegeben wird, d.h. $H \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \underbrace{H \times \dots \times H}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Insbesondere gilt

$$(20) \qquad |\tilde{\Delta}(p^r, p)| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}}$$

$$(21) \qquad |\tilde{\Delta}_0(p^r, p)| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}-r}.$$

Beweis. Gleichung (18) ist für $r = 1$ trivial, da $\tilde{\Delta}(p, p)$ nur aus Translationen besteht. Sei also $r \geqq 2$ und $\psi\colon \tilde{\Delta}(p^r, p) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ die Abbildung, die δ auf den Wert von $\delta(x) - x \pmod p$ schickt, wo $x \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$; wegen (17) (mit $s = 1$) ist dieser Wert von x unabhängig. Falls eine Dilatation δ in $\operatorname{Ker}\psi$ liegt, bildet δ jede Nebenklasse $L_j = j + p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ auf sich ab, sodaß wir durch die Formel

$$(22) \quad \delta(j + ap) = j + \delta_j(a)\,p \qquad (j \in \{0, \dots, p-1\},\ u \in \mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z})$$

p Dilatationen $\delta_j \in \Delta(Z/p^{r-1}Z)$ erhalten. Jedes δ_j liegt in $\tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)$, denn für a, $b \in \mathbf{Z}/p^{r-1}\mathbf{Z}$ gibt es wegen (17) eine Zahl $u \in \mathbf{Z}$ mit

$$(23) \qquad p(\delta_j(a) - \delta_j(b)) = \delta(j + ap) - \delta(j + bp) \equiv (1 + up)(ap - bp) \pmod{p^r}.$$

Wir haben also eine injektive Abbildung

(24) $$\operatorname{Ker}\psi \to \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p\,, \quad \delta \mapsto (\delta_0, \ldots, \delta_{p-1})$$

konstruiert; wir behaupten, daß sie ein Isomorphismus ist. Wenn nämlich $\delta_0, \ldots, \delta_{p-1} \in \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)$ vorgegeben sind und δ durch (22) definiert wird, dann gilt erst $\delta(x) \equiv x \pmod p$ $(\forall x \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ und somit $\delta(x) - \delta(y) \equiv x - y \pmod p$, was für $x \not\equiv y \pmod p$ schon ausreicht, um die Existenz einer Zahl u wie in (17) zu zeigen; falls x und y kongruent modulo p sind, schreiben wir $x = j + ap$, $y = j + bp$ und erhalten wie in (23) die Existenz von u aus der entsprechenden Eigenschaft von δ_j. Somit haben wir eine exakte Folge

$$1 \to \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p \to \tilde{\Delta}(p^r, p) \xrightarrow{\psi} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 1\,.$$

Man rechnet leicht nach, daß ψ spaltet und daß $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ auf $\tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p$ durch zyklische Permutation operiert, also

$$\tilde{\Delta}(p^r, p) \cong \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p) \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\,.$$

Gleichung (18) folgt hieraus durch Induktion über r.

Die Gruppe $\tilde{\Delta}_0(p^r, p)$ ist eine Untergruppe von $\operatorname{Ker}\psi$ und entspricht unter dem Isomorphismus (24) offensichtlich der Gruppe $\tilde{\Delta}_0(p^{r-1}, p) \times \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^{p-1}$, sodaß Gleichung (19) unter Benutzung von (18) durch nochmalige Induktion über r folgt.

Satz 8. *Sei p eine Primzahl, $r \geqq s \geqq 1$. Dann gibt es eine exakte Folge*

(25) $$1 \to (\underbrace{(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \wr \ldots \wr (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}_{r-s \text{ mal}})^p \to \tilde{\Delta}(p^r, p^s) \to \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \to 1$$

und einen Isomorphismus

(26) $$\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s) \cong ((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \ldots \times (\underbrace{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \ldots \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}_{r-s \text{ mal}}))^{p-1}\,,$$

insbesondere gilt

(27) $$|\tilde{\Delta}(p^r, p^s)| = p^{p+p^2+\ldots+p^{r-s}+s}\,,$$

(28) $$|\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)| = p^{p+p^2+\ldots+p^{r-s}-r+s}\,.$$

Beweis. Der Fall $r = s$ ist trivial. Sei also $r > s$. Analog zu Satz 7 definieren wir eine surjektive Abbildung $\psi\colon \tilde{\Delta}(p^r, p^s) \to \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$, indem wir eine Dilatation δ auf den (nach (17) von x unabhängigen) Wert von $\delta(x) - x \pmod{p^s}$ abbilden. Für $\delta \in \operatorname{Ker}\psi$ setzen wir

$$\bar{\delta}(x) = x + \frac{\delta(x) - x}{p^{s-1}} \in \mathbf{Z}/p^{r-s+1}\mathbf{Z}\,. \tag{29}$$

Dann ist (17) zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\, \exists u \in \mathbf{Z} \text{ mit } &\bar{\delta}(x) - \bar{\delta}(y) \\ &= (1 + pu)(x - y) \pmod{p^{r-s+1}} \end{aligned} \tag{30}$$

äquivalent. Insbesondere ist $\bar{\delta}(x) = \bar{\delta}(y)$ falls $x \equiv y \pmod{p^{r-s+1}}$, sodaß $\bar{\delta}$ als Abbildung von $\mathbf{Z}/p^{r-s+1}\mathbf{Z}$ in sich selbst betrachtet werden kann, und nach (30) ist diese Abbildung sogar eine Dilatation aus $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$. Wegen $\delta(x) \equiv x \pmod{p^s}$ und (29) gilt $\bar{\delta}(x) \equiv x \pmod{p}$, d.h. $\bar{\delta}$ liegt im Kern der im Beweis von Satz 7 konstruierten Abbildung $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Umgekehrt definiert jedes $\bar{\delta} \in \tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$ mit $\delta(x) \equiv x \pmod{p}$ durch

$$\delta(x) = x + p^{s-1}(\bar{\delta}(x) - x))$$

eine Dilatation aus $\operatorname{Ker}\psi$, also

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\psi &\cong \operatorname{Ker}(\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \underset{(24)}{\cong} \Delta(p^{r-s}, p)^p \\ &\underset{(18)}{\cong} (\underbrace{(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \wr \ldots \wr (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}_{r-s+1 \text{ mal}})^p\,. \end{aligned}$$

Da $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s) \subset \operatorname{Ker}\psi$ unter $\delta \mapsto \bar{\delta}$ den homogenen Dilatationen von $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$ entspricht, ist (26) eine unmittelbare Folge von (19).

Die Gruppenerweiterung (25) können wir leicht beschreiben: Die Gruppe $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ ist das Produkt des Normalteilers $\operatorname{Ker}\psi$ und der zu $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ isomorphen Gruppe der Translationen, welche durch Reduktion $\pmod{p^s}$ surjektiv auf die Gruppe $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ in (25) abgebildet werden; die Translationen $x \mapsto x + p^s a$, die bei dieser Projektion auf 0 gehen, operieren auf $\operatorname{Ker}\psi \cong \tilde{\Delta}(p^{r-s}, p)^p$ durch die entsprechenden Translationen $x \mapsto x + a$ in $\tilde{\Delta}(p^{r-s}, p)$.

Wir behandeln nun den Fall unendlichen Exponents. Wir bezeichnen mit $\mathbf{Z}/p^{\infty}$ die Gruppe $\varinjlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (also die p-Komponente von $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$) und mit $\mathbf{Z}_p^*$ die Gruppe der p-adischen Einheiten.

SATZ 9. *Sei G eine abelsche p-Gruppe unendlichen Exponents. Falls $G \cong \mathbf{Z}/p^{\infty}$, so ist*

$$\Delta_0(G) \cong \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \dots .$$

Falls $G \cong \mathbf{Z}/p^{\infty} \oplus G'$ mit $G' \neq \{0\}$ eine Gruppe von endlichem Exponent p^s, so ist $\Delta_0(G)$ isomorph einer nur von p^s abhängigen Gruppe $\Delta_0(p^{\infty}, p^s)$ mit

$$1 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \dots)^{p-1} \to \Delta_0(p^{\infty}, p^s) \to (\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})^* \to 1 .$$

In allen anderen Fällen ist $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}_p^*$.

Beweis. Aus der Theorie der abelschen Gruppen (siehe etwa das Buch von Kaplansky) folgt, daß G entweder einen direkten Summanden $\mathbf{Z}/p^{\infty}$ hat oder reduziert ist (d.h. keine dividierbare Gruppe enthält), wobei G im letzteren Fall zyklische Summanden beliebig hoher Ordnung hat. Es gibt also drei Fälle zu unterscheiden:

i) $G = \mathbf{Z}/p^{\infty} \oplus G'$ mit $\exp(G') = p^s < \infty$,

ii) $G = \mathbf{Z}/p^{\infty} \oplus G'$ mit $\exp(G') = \infty$,

iii) G reduziert, $\exp(G) = \infty$.

Nach Bemerkung 1 zu Satz 5 ist $\Delta_0(G) \cong \varprojlim \Delta_0(G[p^t])$. Für t genügend groß ist die Gruppe $G[p^t]$ im Falle i) zu $\mathbf{Z}/p^tZ \oplus G'$ isomorph und in den Fällen ii) und iii) zu $\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus G''$ mit $\exp(G'') \leq p^t$. Die Behauptung des Satzes folgt jetzt aus den Sätzen 5, 6 und 8.

Mit diesem Satz haben wir die Berechnung der Dilatationsgruppen aller abelschen p-Gruppen und damit aller abelschen Gruppen abgeschlossen.

(Reçu le 4 août 1977)

S. Suter
D. Zagier

Mathematisches Institut
der Universität Bonn (BRD)