

# 7. Example of a computation

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Similarly, one can prove that  $S_B^*(A \otimes V, B)$  is effectively a model for the space of sections  $\Gamma_G$  (cf. [14]).

Eventually for computations, one proves that one gets also a model for  $\Gamma_G$  by using instead of  $\Omega_{M_G}$  a  $DG$ -algebra  $A$  as in § 5 which is a finite dimensional free  $B$ -module.

### 7. EXAMPLE OF A COMPUTATION

Let us consider the case where  $M$  is the  $n$ -sphere  $S^n$ ,  $G$  the rotation group  $SO_{n+1}$  and  $E$  the bundle described in § 3. A model for  $M_G$  is the  $DG$ -algebra  $A$  defined by

$$A = R[p_1, \dots, p_k, s] / (s^2 - p_k) \quad d \equiv 0 \quad \text{for } n = 2k$$

$$\text{or } A = R[p_1, \dots, p_{k-1}, \chi] \otimes E(s) \quad ds = \chi \quad \text{for } n = 2k - 1$$

where  $\deg p_i = 4i$  and  $\deg s = n$ .

A model for  $E_G$  is obtained by taking the tensor product of  $A$  with  $WU_n$ , the differential being defined by

$$dh_i = c_i - p_{i/2} \quad \text{and} \quad dc_i = 0.$$

By the way,  $WSO_n$  is also a model for  $E_G$ .

We now consider the case  $n = 2$ . The minimal model of  $E_G$  is the  $DG$ -algebra which begins as

$$A \otimes \Lambda(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{12}, x_{13}, x_{23}, \dots)$$

where

$$\deg x_1 = \deg x_2 = 5, \deg x_3 = 7, \deg x_4 = \deg x_5 = 8,$$

$$\deg x_{12} = 9, \deg x_{13} = \deg x_{23} = 11,$$

etc.

(there is an infinite number of generators).

The differential is defined by

$$dx_1 = dx_2 = 0, dx_3 = -p_1^2, dx_4 = p_1 x_1, dx_5 = p_1 x_2,$$

$$dx_{12} = x_1 x_2, dx_{13} = x_1 x_3 - p_1 x_4, dx_{23} = x_2 x_3 - p_1 x_5,$$

etc.

According to the construction of § 5, a minimal model for the bundle  $\Gamma_G \rightarrow B_G$  begins as

$$R[p_1] \otimes \Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, x_3, \bar{x}_{12}, x_4, x_5, \dots)$$

where

$$\deg \bar{x}_1 = \deg x_i - 2, \varepsilon(x_i) = 1 \otimes x_i + s \otimes \bar{x}_i,$$

$dx_i$  is as above and  $dx_{12} = x_1x_2 + p_1\bar{x}_1\bar{x}_2$

$$d\bar{x}_1 = d\bar{x}_2 = d\bar{x}_3 = 0, d\bar{x}_4 = p_1\bar{x}_1, d\bar{x}_5 = p_1\bar{x}_2,$$

$$d\bar{x}_{12} = \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2,$$

etc.

A basis for  $H^*(\Gamma_G) = H^*(L_{S^2}, SO_3)$  is given by the classes of the cocycles

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, p_1, x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2, x_1\bar{x}_1, x_1\bar{x}_2, x_2\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_3,$$

$$\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_4, \bar{x}_2\bar{x}_5, \bar{x}_1\bar{x}_5 + \bar{x}_2\bar{x}_4, p_1\bar{x}_3,$$

etc.

The first multiplicative relations are

$$p_1\bar{x}_1 \sim 0, p_1\bar{x}_2 \sim 0, \bar{x}_1x_2 \sim \bar{x}_2x_1, p_1^2 \sim 0, \text{ etc.}$$

The first “exotic” class is given by the cocycle  $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_{12}$  of degree 13.

The classes  $\bar{x}_1$  and  $\bar{x}_2$  correspond to the classes described by Raoul in his lecture [4], for  $n = 2$ .

We now give an example of a general statement

**THEOREM.** *The kernel of the map*

$$H^*(BSO_{n+1}) \rightarrow H^*(L_{S^n}, SO_{n+1})$$

*is the ideal generated by the elements which are polynomials of degree  $> 2n$  in the Pontrjagin classes  $p_1, \dots, p_{[n/2]}$ .*

As a consequence, we get exactly what is implied by the vanishing theorem of Bott [1]. For instance, for  $n$  odd, the image of the powers of the Euler class is non zero. So one can ask for examples of flat  $(2k+1)$ -sphere bundles with a non zero power of the Euler class.

One can also check that the homomorphism (see end of § 3)

$$WSO_n \rightarrow C^*(L_{S^n}, SO_{n+1}, \Omega_{S^n})$$

induces an injection in cohomology.