

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# REMARKS ON THE UNIVERSAL TEICHMÜLLER SPACE<sup>1</sup>

by F. W. GEHRING<sup>2</sup>

## 1. INTRODUCTION

Suppose that  $D$  is a simply connected domain of hyperbolic type in the extended complex plane  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ . Then the hyperbolic or noneuclidean metric  $\rho_D$  in  $D$  is given by

$$\rho_D(z) = (1 - |g(z)|^2)^{-1} |g'(z)|,$$

where  $g$  is any conformal mapping of  $D$  onto the unit disk  $\{z: |z| < 1\}$ . For each function  $\varphi$  defined in  $D$  we introduce the norm

$$\|\varphi\|_D = \sup_{z \in D} |\varphi(z)| \rho_D(z)^{-2}.$$

Next for each function  $f$  which is meromorphic and locally univalent in  $D$  we let  $S_f$  denote the Schwarzian derivative of  $f$ . At finite points of  $D$  which are not poles of  $f$ ,  $S_f$  is given by

$$S_f = \left( \frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2,$$

and the definition is extended to  $\infty$  and the poles of  $f$  by means of inversion.

Now let  $L$  denote the lower half plane  $\{z = x + iy: y < 0\}$  and let  $B_2 = B_2(L, 1)$  denote the complex Banach space of functions  $\varphi$  analytic in  $L$  with the norm

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_L = \sup_{z \in L} 4y^2 |\varphi(z)| < \infty.$$

Next let  $S$  denote the family of functions  $\varphi = S_g$  where  $g$  is conformal in  $L$ , and let  $T = T(1)$  denote the subfamily of those  $\varphi = S_g$  where  $g$  has a quasiconformal extension to  $\bar{\mathbf{C}}$ . From [6] it follows that  $\|\varphi\| \leq 6$  for all  $\varphi \in S$ , and hence that

$$(1) \quad T \subset S \subset B_2.$$

<sup>1</sup>) Communicated to an International Symposium on Analysis, held in honour of Professor Albert Pfluger, ETH Zürich, 1978.

<sup>2</sup>) This research was supported in part by a grant from the U.S. National Science Foundation, Grant MCS-77-02842.

The set  $T$  is called the universal Teichmüller space. An important result due to Ahlfors and Bers shows that each Teichmüller space of a Riemann surface  $R$  or of a Fuchsian group  $G$  has a canonical embedding in the space  $T$ . See, for example, [3].

It is natural to ask if there exist relations, other than (1), between  $S$  and  $T$  as subsets of  $B_2$ . Compactness results for conformal mappings show that  $S$  is closed in  $B_2$ . Hence Bers asked in [2] and [3] if one can characterize  $S$  in terms of  $T$  as follows.

QUESTION. *Is  $S$  the closure of  $T$ ?*

We shall answer this question in the negative by sketching a proof for the following result.

THEOREM 1. *There exists a  $\varphi$  in  $S$  which does not lie in the closure of  $T$ .*

On the other hand, we have the following characterization of  $T$  in terms of  $S$ . See [4].

THEOREM 2.  *$T$  is the interior of  $S$ .*

## 2. REFORMULATIONS IN THE PLANE

A set  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$  is said to be a *quasiconformal circle* if there exists a quasiconformal mapping  $f$  defined in  $\overline{\mathbb{C}}$  which maps the unit circle  $\{z: |z| = 1\}$  onto  $E$ .

Theorems 1 and 2 are then respectively equivalent to the following two results on plane domains  $D$ .

THEOREM 3. *There exists a simply connected domain  $D$  and a positive constant  $\delta$  such that  $f(D)$  is not bounded by a quasiconformal circle whenever  $f$  is conformal in  $D$  with  $\|S_f\|_D \leq \delta$ .*

THEOREM 4. *A simply connected domain  $D$  is bounded by a quasiconformal circle if and only if there exists a positive constant  $\delta$  such that  $f$  is univalent in  $D$  whenever  $f$  is meromorphic in  $D$  with  $\|S_f\|_D \leq \delta$ .*