

5. CONCLUDING REMARKS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. OUTLINE OF THE PROOF OF THEOREM 5

Fix $a \in \left(0, \frac{1}{8\pi}\right)$ and let $D = \overline{\mathbb{C}} - \gamma$, where

$$\gamma = \{z = \pm i e^{(-a+i)t} : 0 \leq t < \infty\} \cup \{0\}.$$

Then D is a simply connected domain which contains the disjoint $e^{2\pi a}$ -spirals

$$\alpha = \{z = e^{(-a+i)t} : 0 < t < \infty\}, \quad \beta = \{z : -z \in \alpha\}.$$

Next let f denote any conformal mapping of D which fixes the points $1, -1, \infty$. To complete the proof of Theorem 5 it is sufficient to show that there exists a positive constant $\delta = \delta(a)$ such that $f(D)$ is not a Jordan domain whenever $\|S_f\|_D \leq \delta$. This is done in three steps.

First using Lemma 1 and a normal family type argument, we can prove that there exists a $\delta_1 = \delta_1(a) > 0$ with the following property. If $\|S_f\|_D \leq \delta_1$, then $f(\alpha)$ and $f(\beta)$ are b -spirals from 1 onto z_2 and from -1 onto w_2 , respectively, where $b \in (1, 2)$. The points z_2, w_2 are the values which $f(z)$ approaches as $z \rightarrow 0$ from opposite sides of $\partial D = \gamma$.

Next theorems on quasiconformal mappings due to Ahlfors [1] and Teichmüller [8] imply the existence of a positive constant $\delta_2 = \delta_2(a) \leq \delta_1$ such that $|z_2| \leq \frac{1}{5}$ and $|w_2| \leq \frac{1}{5}$ whenever $\|S_f\|_D \leq \delta_2$.

Finally set $\delta = \delta_2$. If $\|S_f\|_D \leq \delta$, then

$$|z_2 - w_2| \leq \frac{2}{5} < \frac{4}{5b} \leq \frac{1}{b} \min(|1 - z_2|, |-1 - w_2|),$$

Lemma 2 implies that $z_2 = w_2$ and hence $f(D)$ is not a Jordan domain. A complete proof for Theorem 5 is given in [5].

5. CONCLUDING REMARKS

We have obtained Theorems 1 and 3 from the stronger conclusion in Theorem 5. We conclude by stating a result for multiply connected domains which implies Theorems 2 and 4.

Given a function φ defined in an arbitrary proper subdomain D of \mathbb{C} , we introduce the norm

$$\|\varphi\|_D^* = \sup_{z \in D} |\varphi(z)| \operatorname{dist}(z, \partial D)^2.$$

When D is simply connected, classical estimates due to Koebe and Schwarz imply that

$$\frac{1}{4} \operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1} \leq \rho_D(z) \leq \operatorname{dist}(z, \partial D)^{-1}$$

for $z \in D$, and hence that

$$\|\varphi\|_D^* \leq \|\varphi\|_D \leq 16 \|\varphi\|_D^*.$$

Theorem 6 in [4] and a recent result due to B. Osgood [7] yield the following extension of Theorem 4.

THEOREM 6. *A finitely connected proper subdomain D of \mathbf{C} is bounded by quasiconformal circles or points if and only if there exists a positive constant δ such that f is univalent in D whenever f is meromorphic in D with $\|S_f\|_D^* \leq \delta$.*

REFERENCES

- [1] AHLFORS, L. V. Quasiconformal reflections. *Acta Math.* 109 (1963), pp. 291-301.
- [2] BERS, L. On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups I. *Ann. of Math.* 91 (1970), pp. 570-600.
- [3] ——— Uniformization, moduli, and kleinian groups. *Bull. London Math. Soc.* 4 (1972), pp. 257-300.
- [4] GEHRING, F. W. Univalent functions and the Schwarzian derivative. *Comm. Math. Helv.* 52 (1977), pp. 561-572.
- [5] ——— Spirals and the universal Teichmüller space. *Acta Math.* 141 (1978) (to appear).
- [6] KRAUS, W. Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenen Bereiches mit der Kreisabbildung. *Mitt. Math. Sem. Giessen* 21 (1932), pp. 1-28.
- [7] OSGOOD, B. Univalence criteria in multiply connected domains. (*To appear*).
- [8] TEICHMÜLLER, O. Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. *Abh. Preuss. Akad. Wiss.* 22 (1940), pp. 1-197.

(Reçu le 15 mai 1978)

F. W. Gehring

Mathematics Department
University of Michigan
Ann Arbor, Michigan, 48104