

4. Conclusions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Also Schwarz's inequality yields

$$\int_{R_0+1}^{R_n} h_2(t, \phi) \frac{dt}{t} \int_{R_0+1}^{R_n} \frac{dt}{t h_2(t, \phi)} \geq \left\{ \log \left(\frac{R_n}{R_0+1} \right) \right\}^2,$$

i.e.

$$\begin{aligned} \int_{R_0+1}^{R_n} \frac{dt}{t h_2(t, \phi)} &\geq \left\{ \log \frac{R_n}{R_0+1} \right\}^2 / \int_{R_0+1}^{R_n} h_2(t, \phi) \frac{dt}{t} \\ &> \frac{2\mu + 2\delta}{\pi} \log R_n \end{aligned}$$

for all large n , where δ is a positive constant, in view of (13). Thus (15) yields

$$(16) \quad \omega_n(z) = O(R_n^{-\mu-\delta}), \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Also since $u(z) \leq (K+1)B(R_n)$ on $|z| = R_n$, we deduce finally that

$$u(z) \leq (K+1)B(R_n)\omega_n(z)$$

in Δ_n and now (12) and (16) yield (14) for any point in Δ . In particular for z on S , we deduce (11) as required. This proves the Lemma.

4. CONCLUSIONS

It is not difficult to obtain a contradiction from the above Lemma. We may assume without loss of generality that the angle is given by $S: |\arg z| < \frac{\pi}{2\mu}$. Since $f(z)$ is bounded in S , we deduce that $\log |f(z)|$ is bounded above in S by the Poisson integral of the boundary values on the arms $\arg z = \mp \pi/(2\mu)$. This leads, for $K > 1$, to

$$(17) \quad \log |f(re^{i\theta})| < -A(\mu)(K-1)r^\mu \int_r^\infty \frac{B(t)dt}{t^{\mu+1}}, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2\mu},$$

$$0 < r < \infty,$$

where the constant $A(\mu)$ depends only on μ .

Given any constant $C > 1$, we can, since f has lower order μ find a sequence r_n tending to infinity with n and such that

$$B(t) > \frac{1}{2} \left(\frac{t}{r_n} \right)^\mu B(r_n), \quad r_n \leq t \leq Cr_n$$

Now (17) yields

$$\begin{aligned} \log |f(r_n e^{i\theta})| &< -A(\mu)(K-1)B(r_n) \frac{1}{2} \int_{r_n}^{Cr_n} \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{1}{2} A(\mu)(K-1)B(r_n) \log C. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(r_n e^{i\theta})| d\theta &\leq -\frac{\pi}{\mu} A(\mu)(K-1)B(r_n) \log C \\ &\quad + \left(2\pi - \frac{\pi}{\mu}\right) B(r_n). \end{aligned}$$

This contradicts Jensen's formula if C is sufficiently large, since the left hand side is bounded below.

We can also obtain some conclusions if $K = 1$. In this case we note that if $S: \alpha_1 \leq \arg z \leq \alpha_2$ is the angle constructed in Lemma 1 then, since Γ lies almost entirely in S , we deduce for large r that

$$\inf_{\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2} \log |f(re^{i\theta})| \leq -\frac{1}{3} B(r).$$

Since f is bounded above in S it follows from an earlier Theorem of mine [5] that

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} B(r) r^{\pi/(\alpha_2 - \alpha_1)} < \infty.$$

Thus $B(r)$ has order $\lambda = \mu$ and f cannot have maximal type. Further $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/\lambda$ and from this we deduce that as $z = re^{i\theta} \rightarrow \infty$ on Γ outside a set of r of logarithmic density zero

$$\theta = \arg z \rightarrow \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2),$$

so that Γ has a preferred direction. If $\mu = \infty$, we must have $\alpha_1 = \alpha_2$, so that Γ has a unique limiting direction.

We also note that $\mu > 1$, unless $f(z) \equiv e^{(az+b)}$. For we have seen that f cannot have order 1, maximal type. However if $f(z) \not\equiv e^{az+b}$ and f has order one mean type, or minimal type then an earlier theorem of mine [6] shows that $\mu(r)M(r)$ cannot be bounded.

Finally let me say a few words concerning the case of infinite order. In this case we assume $K > 1$ and define

$$\mu(r) = \inf \frac{\log B(r_2) - \log B(r_1) + A_1(K)}{\log r_2 - \log r_1}$$

where the inf is taken over all pairs r_1, r_2 , such that $r < r_1 < r_2 < \infty$, and

$$A_1(K) = \log \left\{ \frac{20(1+K)}{K-1} \right\}.$$

The quantity $\mu(r)$ plays a similar role to the lower order μ in the above argument and

$$\log |f(z)| < -\frac{K-1}{4} B(z), \quad \alpha_1(r) < \arg z < \alpha_2(r), \quad |z| < r,$$

where $\alpha_2 - \alpha_1 \geq \pi/\mu(r)$. From this and the fact that $\mu(r)$ increases with r it is possible to obtain a contradiction.

REFERENCES

- [1] BEURLING, A. Some theorems on boundedness of analytic functions. *Duke Math. J.* 16 (1949), pp. 355-359.
- [2] HADAMARD, J. Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *J. de Math.* (4) 9 (1893), pp. 171-215.
- [3] HAYMANN, W. K. Remarks on Ahlfors' distortion theorem. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 19 (1948), pp. 33-53.
- [4] ——— The minimum modulus of large integral functions. *Proc. London Math. Soc.* (3) 2 (1952), pp. 469-512.
- [5] ——— Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle. *J. Math. Pures Appl.* (9) 35 (1956), pp. 115-126.
- [6] ——— The minimum modulus of integral functions of order one. *J. Analyse Math.* 28 (1975), pp. 171-212.
- [7] KJELLBERG, B. A theorem on the minimum modulus of entire functions. *Math. Scand.* 12 (1963), pp. 5-11.
- [8] LITTLEWOOD, J. E. A general theorem on integral functions of finite order. *Proc. London Math. Soc.* (2) 6 (1908), pp. 189-204.
- [9] VALIRON, G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini, et en particulier les fonctions à correspondance régulière. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (3) 5 (1913), pp. 117-257.
- [10] WIMAN, A. Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe null. *Math. Annalen* 76 (1915), pp. 197-211.
- [11] ——— Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion. *Acta Math.* 41 (1918), pp. 1-28.

(Reçu le 15 mai 1978)

W. K. Hayman

Department of Mathematics
Imperial College
London SW7.