I. COURBES PLANES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

tant qu'éléments de $K[X]$ [AC, VII, §3, nº 5, th. 2], ou encore si et seulement si leurs facteurs irréductibles (= éléments extrémaux) sont non équivalents deux à deux [A, VI, §1, nº 12, prop. 11 (DIV) et AC, VII, §3, nº 2, th. 1], ou enfin si et seulement si leur *résultant n'est pas nul* dans A (donc est inversible dans K); cette dernière affirmation est à un oubli de détail près le lemme 3 de l'appendice III de [7]. De même, les facteurs irréductibles de P sont non équivalents entre eux si et seulement si son discriminant n'est pas nul; on dit alors que P est *sans facteur multiple*.

Soient B un second anneau intègre et $\varphi: A \to B$ un homomorphisme appliquant 1 sur 1; nous désignons par la même lettre l'homomorphisme $A[X] \to B[X]$. Si Res (,) et Dis ( ) dénotent respectivement le résultant et le discriminant, il convient d'insister sur la propriété suivante, qui est très utile malgré sa banalité:

$$\begin{aligned} \varphi(\operatorname{Res}(P, Q)) &= \operatorname{Res}(\varphi(P), \varphi(Q)) \\ \varphi(\operatorname{Dis}(P)) &= \operatorname{Dis}(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Le cas le plus fréquent ci-dessous est celui ou $A = \mathcal{O}(D)$ est l'anneau des fonctions holomorphes sur un polycylindre D de $\mathbf{C}^k$ centré à l'origine, où $B = {}_k\mathcal{O}$ et où $\varphi: f \mapsto \underline{f}$ est l'injection canonique. Précisons à ce sujet que tous les *polycylindres* du texte sont *ouverts*.

Le travail du premier auteur a été rendu possible par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

I. COURBES PLANES

I.1. Singularités des courbes planes et revêtements

Soit $\underline{\gamma}$ un *germe de courbe plane*. On peut toujours supposer $\underline{\gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass (quitte à opérer un changement linéaire de coordonnées). Plus précisément, il existe

1º) Un polycylindre D_2 dans $\mathbf{C}^2$, centré à l'origine; nous noterons D_1 sa trace sur la droite $\mathbf{C} = \mathbf{C}_x$ de $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^2_{xy}$.

2º) Un polynôme de Weierstrass $f \in \mathcal{O}(D_1)[y]$ de degré n, c'est-à-dire une fonction $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

pour tout $(x, y) \in D_2$, où les a_j sont des fonctions holomorphes dans D_1 qui s'annulent à l'origine.

Le germe $\underline{\gamma}$ est alors représenté par $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid f(x, y) = 0\}$. Nous écrirons plus simplement γ si $D_2 = \mathbf{C}^2$. On peut toujours remplacer D_2 par un polycylindre plus petit; en particulier, on pourra toujours supposer que la projection canonique fournit par restriction une application π de γ_D *sur* D_1. Si $n = 1$, le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (x, y - a(x))$ montre que γ_D est lisse à l'origine; nous supposerons désormais $\underline{n \geqslant 2}$ (on prendra garde que ceci n'exclut pas tous les germes lisses, comme le montre le cas de $f(x, y) = y^2 - x$).

Proposition 1. Soit $\underline{\gamma}$ un germe donné comme ci-dessus. Alors la projection canonique de $\mathbf{C}^2$ sur $\mathbf{C}$ induit (après rétrécissement éventuel de D_2) un *revêtement* holomorphe à n feuilles

$$\pi^* \colon \gamma_D^* = \gamma_D - \{(0, 0)\} \to D_1^* = D_1 - \{0\}$$

Preuve. Le discriminant Dis (f) est un élément de $\mathcal{O}(D_1)$. Notons Ev: $\mathcal{O}(D_1) \to \mathbf{C}$ le morphisme d'évaluation $g \mapsto g(0)$; alors Ev $(\text{Dis}(f)) = \text{Dis}(\text{Ev}(f))$. Or Ev $(f) = y^n$ est un polynôme qui a par hypothèse $(n \geqslant 2)$ une racine multiple et son discriminant est nul. Par suite Dis (f) s'annule à l'origine.

On peut supposer que le germe à l'origine $\underline{f}$ de f est sans facteur multiple, de sorte que Dis $(\underline{f})$ n'est pas nul. Mais Dis $(\underline{f})$ est le germe de Dis (f). Par suite la fonction Dis (f) n'est pas nulle, ses zéros sont isolés, et on peut supposer (après rétrécissement de D_2 au besoin) que Dis (f) ne s'annule pas dans D_1^*.

Soient $a \in D_1^*$ et $\text{Ev}_a \colon \mathcal{O}(D_1) \to \mathbf{C}$ l'évaluation $g \mapsto g(a)$. Comme $\text{Dis}(\text{Ev}_a(f)) = \text{Ev}_a(\text{Dis}(f)) \neq 0$, le polynôme $y \mapsto f(a, y)$ n'a pas de racine double; en d'autres termes $\frac{\partial f}{\partial y}(a, y) \neq 0$ si $(a, y) \in \gamma_D^*$. Par suite la fonction $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{O}(D_2)$ ne s'annule pas sur γ_D^*. Le théorème des fonctions implicites affirme dans cette situation que γ_D^* est une courbe lisse et que π^* est un isomorphisme analytique local. Ses fibres ayant toutes le même nombre n d'éléments, c'est de plus un revêtement. ■

Corollaire. Les singularités des courbes planes sont isolées.

PROPOSITION 2. On suppose $\underline{f}$ sans facteur multiple. Alors $\underline{f}$ est *réductible* si et seulement s'il existe un polycylindre D_2 tel que $\underline{f}$ ait un représentant $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec γ_D^* *non connexe.*

Preuve. Supposons $\underline{f} = \underline{f}' \underline{f}''$, avec $\underline{f}'$ et $\underline{f}''$ des polynômes de Weierstrass non constants et sans facteur commun; leur résultant est donc un élément non nul de ${}_1\mathcal{O}$. On peut choisir un polycylindre D_2 et des représentants f_D' et f_D'' de $\underline{f}'$ et $\underline{f}''$ tels que le résultant de f_D' et f_D'' soit une fonction de $\mathcal{O}(D_1)$ sans zéro dans D_1^*. Un argument déjà utilisé dans la preuve de la proposition 1 montre alors que f_D' et f_D'' n'ont pas de zéro commun dans $D_2 - \{(0, 0)\}$. Par suite les ensembles

$$\gamma' = \{(x, y) \in D_2 \mid f_D'(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0\}$$

et

$$\gamma'' = \{(x, y) \in D_2 \mid f_D''(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0\}$$

forment une partition en fermés non vides de γ_D^*, qui n'est donc pas connexe.

Supposons réciproquement qu'il existe un polycylindre D_2 tel que l'espace total du revêtement associé $\pi^*: \gamma_D^* \to D_1^*$ admette une partition en deux fermés non vides: $\gamma_D^* = \gamma' \cup \gamma''$. Par la proposition 1, le cardinal n' de $\gamma' \cap \pi^{-1}(x)$ ne dépend pas du choix de x dans D_1^*. Soient $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ les zéros de la fonction $y \mapsto f(x, y)$, numérotés de telle sorte que $\varphi_j(x) \in \gamma'$ pour $j \leqslant n'$. Posons

$$f'(x, y) = \prod_{j=1}^{n'} (y - \varphi_j(x)) \quad \text{et} \quad f''(x, y) = \prod_{j=n'+1}^{n} (y - \varphi_j(x))$$

pour tout $(x, y) \in D_2$. Les φ_j ne sont en général *pas* holomorphes (seules leurs fonctions symétriques élémentaires le sont). Il résulte néanmoins de la proposition 1 que, pour tout disque $\Delta_1 \subset D_1^*$, on peut faire en sorte que les φ_j soient holomorphes dans Δ_1. Par suite, f' et f'' sont holomorphes au voisinage de tout point (x, y) avec $x \neq 0$, donc dans tout D_2 par le théorème d'extension de Riemann. En d'autres termes $\underline{f} = \underline{f}' \underline{f}''$ est réductible. ■

PROPOSITION 3. Supposons $\underline{f}$ irréductible. Alors il existe un nombre positif r et une fonction holomorphe φ dans $D(r) = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < r\}$ tels que $\begin{cases} D(r) \to \gamma_D \\ t \mapsto (t^n, \varphi(t)) \end{cases}$ soit un homéomorphisme.

Preuve. Avec les notations de la proposition 1, soient s le rayon de D_1 et r la racine positive n-ième de s. Notons $D(r)^*$ le disque $D(r)$ privé de l'origine. Les applications $t \mapsto t^n$ de $D(r)^*$ sur D_1^* et $(x, y) \mapsto x$ de γ_D^* sur D_1^* sont des revêtements holomorphes (proposition 1) connexes (proposition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} D(r)^* \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr] & & \gamma_D^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & D_1^* & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi\colon D(r) \to \gamma_D$ de la forme $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

Corollaire. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques.*

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de $\mathbf{C}^k$) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \dots + a_k t^{m+k} + \dots (a_0 \neq 0)\,;$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geqslant n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \dots + a_k x^{(m+k)/n} + \dots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. Les tangentes en un point d'une courbe plane

Soient k un entier positif et $\mathrm{Ev}\colon {}_k\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

Proposition 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien.* En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}\,[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbf{C}\,[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\mathrm{Ev}\,(P) = \rho\,\sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}\,[t]$ avec $P = RS$, $\mathrm{Ev}\,(R) = \rho$ et $\mathrm{Ev}\,(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.

Preuve. Notons $\operatorname{Ev}(P)(t) = P(0, t) = \prod (t-\lambda_j)^{s_j}$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ distincts. (Dans cette preuve, les produits $\prod$ portent sur l'indice j de 1 à n et les $\prod'$ portent sur j de 2 à n). Nous voulons montrer par induction sur n qu'il existe des polynômes unitaires $P_1, ..., P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = \prod P_j$ et $\operatorname{Ev}(P_j)(t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$. Cette assertion étant trivialement vraie pour $n = 1$, on peut supposer $n \geqslant 2$ et qu'elle est vraie pour tous les polynômes dont l'évaluation a au plus $n - 1$ racines distinctes.

Supposons d'abord que $P(0, 0) = 0$ et que $\operatorname{Ev}(P) = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Le théorème de préparation permet d'écrire

$$P(x; t) = u(x, t)\,[t^{s_1} + a_1(x)\, t^{s_1-1} + ... + a_{s_1}(x)]$$

où u est un polynôme de ${}_k\mathcal{O}[t]$ inversible dans ${}_{k+1}\mathcal{O}$ et où les a_j sont des germes dans ${}_k\mathcal{O}$ qui sont nuls à l'origine. Par suite

$$Ev(P)(t) = u(0, t)\, t^{s_1} = t^{s_1} \prod{}' (t-\lambda_j)^{s_j}$$

et $u(0, t) = \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Par hypothèse d'induction, il existe $P_2, ..., P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $u = \prod' P_j$ et $P_j(0, t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$ pour $j = 2, ..., n$. On achève en posant

$$P_1(x, t) = t^{s_1} + a_1(x)\, t^{s_1-1} + ... + a_{s_1}(x).$$

Supposons au contraire que $P(0, 0) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P(0, \lambda) = 0$ et P^T le polynôme défini par $P^T(x, t) = P(x, t+\lambda)$. Alors P^T est un produit de n facteurs P_j^T par l'argument précédent et on achève en posant $P_j(x, t) = P_j^T(x, t-\lambda)$ pour $j = 1, ..., n$. ■

Notons qu'il existe d'autres définitions (équivalentes à celle de la proposition) pour un anneau local d'être hensélien; voir par exemple [AC, III, §4, ex. 3].

Soient $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D comme au début de la section 1. Ecrivons la série de Taylor de f à l'origine sous la forme $f(x, y) = \sum h_j(x, y)$ (somme sur j de p à l'infini), où h_j est un polynôme homogène de degré j en x et y et où $h_p \neq 0$. Le polynôme h_p est un produit de facteurs linéaires. Quitte à modifier les axes de coordonnées, on peut supposer que h_p ne s'annule pas sur la droite d'équation $x = 0$, donc que $h_p(x, y) = c \prod (y-\lambda_j x)^{s_j}$ avec c un nombre complexe, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des nombres complexes distincts, et $s_1, ..., s_m$ des entiers positifs de somme p. Les droites d'équation $y = \lambda_j x$ sont par définition les *tangentes* de $\underline{\gamma}$. Pour chaque entier $j \geqslant p$, on a $h_j(0, y)$ proportionnel à y^j, et $h_p(0, y) = cy^p$ avec $c \neq 0$. Par suite, f est une fonction régulière d'ordre p en y; avec les notations du début de la section 1, on a donc $p = n$. Cet entier s'appelle la *multiplicité* de f à l'origine; il ne dépend pas des coordonnées choisies sur $\mathbf{C}^2$.

Proposition 5. *Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, alors $\underline{f}$ est réductible.*

Preuve. Comme

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \dots + a_n(x) = \sum_{j=n}^{\infty} h_j(x,y)$$

l'ordre du zéro de a_i à l'origine est au moins i ($i=1, \dots, n$). Nous écrirons

$$f(x,y) - h_n(x,y) = b_1(x)\,y^{n-1} + b_2(x)\,y^{n-2} + \dots + b_n(x)$$

et $b_i(x) = x^{i+1}\,c_i(x)$, où c_i représente un germe holomorphe à l'origine ($i=1, \dots, n$).

Si u et v décrivent de petits voisinages de l'origine dans $\mathbf{C}$, la fonction $(u,v) \mapsto f(v, uv)$ est divisible par v^n. Définissons $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ par $\tilde{f}(u,v) = v^{-n} f(v, uv)$; on a donc

$$\tilde{f}(u,v) = h_n(1,u) + vc_1(v)\,u^{n-1} + vc_2(v)\,u^{n-2} + \dots + vc_n(v)\,.$$

L'évaluation Ev: ${}_1\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ associe au polynôme $\tilde{f} \in {}_1\mathcal{O}\,[u]$ le polynôme $u \mapsto h_n(1,u)$ de $\mathbf{C}\,[u]$.

Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, il résulte de la proposition 4 que $\tilde{f}$ est un produit dans ${}_1\mathcal{O}\,[u]$ de polynômes unitaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ de degrés respectifs $r < n$ et $s < n$. Définissons alors g et h dans ${}_1\mathcal{O}\,[y]$ par $g(x,y) = x^r\,\tilde{g}(y/x, x)$ et $h(x,y) = x^s\,\tilde{h}(y/x, x)$. Alors $f = gh$ et $\underline{f}$ est réductible. ■

La signification géométrique de $\tilde{f}$ dans la preuve ci-dessus sera éclairée au numéro suivant.

Par exemple, le polynôme réductible xy définit une courbe ayant deux tangentes à l'origine. La réciproque à la proposition 5 n'est pas vraie car le polynôme réductible $x(x^2 - y^3)$ définit une courbe n'ayant qu'une tangente à l'origine.

I.3. Eclatement et irréductibilité

Pour tout entier positif k, nous noterons h la projection canonique de $\mathbf{C}^{k+1} - \{0\}$ sur l'espace projectif P^k; nous écrirons $(\omega_0, \dots, \omega_k)$ les coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{C}^{k+1}$ et $[z_0, \dots, z_k]$ les coordonnées homogènes d'un point de P^k. Introduisons la variété

$S_{(-k)} = \{([z_0, z_1], w) \in P^1 \times \mathbf{C}^{k+1} \mid w \in h^{-1}([z_0^k, z_0^{k-1}z_1, \ldots, z_1^k]) \cup \{0\}\}$

et la restriction $\pi_{(-k)}$ à $S_{(-k)}$ de la seconde projection du produit $P^1 \times \mathbf{C}^{k+1}$. Nous écrirons aussi $\pi: S \to \mathbf{C}^2$ lorsque $k = 1$; cette application est alors par définition l'*éclatement de* $\mathbf{C}^2$ *à l'origine.*

Ecrivons cela dans les cartes standards. Les indices j ci-dessous sont à prendre dans $\{0, 1\}$.

Posons $\tilde{U}_j = \{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\} \mid z_j \neq 0\}$ et $U_j = h(\tilde{U}_j)$. Soit $\tilde{\varphi}_j: \tilde{U}_j \to \mathbf{C}$ l'application qui associe à (z_0, z_1) le quotient z_1/z_0 si $j = 0$ et le quotient z_0/z_1 si $j = 1$; elle passe au quotient et définit une bijection $\varphi_j: U_j \to \mathbf{C}$. Les changements de cartes de l'atlas analytique ainsi défini sur P^1 sont

$$\begin{cases} \mathbf{C}^* = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}^* \\ \qquad u \mapsto u^{-1} \end{cases}$$

et l'isomorphisme inverse.

Considérons ensuite la restriction $\lambda_{(-k)}: S_{(-k)} \to P^1$ de la première projection du produit $P^1 \times \mathbf{C}^{k+1}$. Posons $S_{(-k),j} = \lambda_{(-k)}{}^{-1}(U_j)$ et soient $\psi_j: S_{(-k),j} \to \mathbf{C}^2$ les bijections définies par $\psi_0([z], \omega) = (\varphi_0([z]), \omega_0)$ et $\psi_1([z], \omega) = (\varphi_1([z]), \omega_k)$; les applications inverses sont respectivement

$$(u, v) \mapsto ([1, u], (v, uv, \ldots, u^k v))$$

et

$$(u, v) \mapsto ([u, 1], (u^k v, u^{k-1} v, \ldots, v)).$$

Les changements de cartes de l'atlas analytique ainsi défini sur $S_{(-k)}$ sont

$$\begin{cases} \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} = \psi_0(S_{(-k),0} \cap S_{(-k),1}) \to \psi_1(S_{(-k),0} \cap S_{(-k),1}) = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ \qquad (u, v) \mapsto (u^{-1}, u^k v) \end{cases}$$

et l'isomorphisme inverse.

La variété $S_{(-k)}$ est donc l'espace total d'un fibré holomorphe en droites de projection $\lambda_{(-k)}: S_{(-k)} \to P_1$. Les fonctions de transition associées au recouvrement trivialisant (U_0, U_1) de P^1 sont

$$\psi_{1,0} : \begin{cases} U_0 \cap U_1 \to \mathbf{C}^* \\ [z_0, z_1] \mapsto (z_1/z_0)^k \end{cases}$$

et

$$\psi_{0,1} : \begin{cases} U_1 \cap U_0 \to \mathbf{C}^* \\ [z_0, z_1] \mapsto (z_0/z_1)^k. \end{cases}$$

En particulier, le fibré $\lambda_{(-k)}$ est la puissance tensorielle k-ième du *fibré canonique* $\lambda = \lambda_{(-1)}$. Nous avons construit $\lambda_{(-k)}$ comme l'image inverse du fibré canonique sur P^k par le « morphisme de Véronèse » de P^1 dans P^k, qui est une application de « degré » k. Le signe dans l'indice $(-k)$ exprime que la classe de Chern du fibré $\lambda_{(-k)}$ évaluée sur la classe fondamentale est négative. Le lecteur savant aura reconnu ci-dessus au moins deux bonnes raisons pour lesquelles la classe de Chern de $\lambda_{(-k)}$ est $-k$ (multiplicativité par produit tensoriel et multiplication par le degré); indiquons-en une troisième qui n'utilise que des notions encore plus rudimentaires (voir par exemple [7], chap. 0, §5, prop. 2).

Considérons la section méromorphe $s: P^1 \dashrightarrow S_{(-k)}$ du fibré $\lambda_{(-k)}$ décrite par les applications

$$s_0 : \begin{cases} U_0 \to S_{(-k),0} \\ u \mapsto (u, u) \end{cases} \quad \text{et} \quad s_1 : \begin{cases} U_1 \dashrightarrow S_{(-k),1} \\ u \mapsto (u, u^{-k-1}) . \end{cases}$$

Alors s a un zéro simple, en un point correspondant à l'origine de U_0, un pôle d'ordre $k + 1$, en un point correspondant à l'origine de U_1, et n'a ni autres zéros ni autres pôles. Les différentielles logarithmiques de s aux voisinages de son zéro et de son pôle se représentent respectivement par $d(\log u) = u^{-1}\,du$, de résidu $+1$, et $d(\log u^{-k-1}) = -(k+1)\,u^{-1}\,du$, de résidu $-(k+1)$. Il en résulte que la *classe de Chern* du fibré $\lambda_{(-k)}$ vaut $1 - (k+1) = -k$.

L'application $\pi: S \to \mathbf{C}^2$ s'exprime dans les cartes standards par

$$\pi_0 : \begin{cases} \mathbf{C}^2 = \psi_0(S_0) \to \mathbf{C}^2 \\ (u, v) \mapsto (v, uv) \end{cases}$$

et

$$\pi_1 : \begin{cases} C^2 = \psi_1(S_1) \to C^2 \\ (u, v) \mapsto (uv, v) . \end{cases}$$

On appellera *courbe exceptionnelle* de l'éclatement π et on notera E la courbe $\pi^{-1}(0, 0)$, qui est lisse et isomorphe à P^1. Elle est donnée dans les cartes par

$$E_0 = \psi_0(E \cap S_0) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid v = 0\}$$

et

$$E_1 = \psi_1(E \cap S_1) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid v = 0\} .$$

On notera que, en général, l'image de la section nulle du fibré $\lambda_{(-k)}$ coïncide avec $\pi_{(-k)}^{-1}(0)$.

* * *

Soient alors $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D ou γ comme au début de la section 1. On appelle *transformée stricte* de γ_D et on note $\widetilde{\pi^{-1}}(\gamma_D)$ ou $\widetilde{\gamma_D}$ l'adhérence dans $\widetilde{D}_2 = \pi^{-1}(D_2)$ de $\pi^{-1}(\gamma_D^*)$, avec comme plus haut $\gamma_D^* = \gamma_D - \{0\}$.

Exemple 1. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = xy$. Alors γ a deux composantes irréductibles qui sont l'axe γ' d'équation $y = 0$ et l'axe γ'' d'équation $x = 0$, de sorte que $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}' \cup \tilde{\gamma}''$. Or $\tilde{\gamma}'$ est l'adhérence de $\{([z], \omega) \in S \mid \omega = (x, 0)$ et $x \neq 0\}$, qui est $\{([z], \omega) \in S \mid [z] = [1, 0]\}$. De même $\tilde{\gamma}'' = \{([z], \omega) \in S \mid [z] = [0, 1]\}$. Dans les cartes standards:

$$\psi_0(\tilde{\gamma}') = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = 0\}$$

$$\tilde{\gamma}' \cap S_1 = \tilde{\gamma}'' \cap S_0 = \varnothing$$

$$\psi_1(\tilde{\gamma}'') = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = 0\}.$$

On retiendra que $\tilde{\gamma}$ est réunion de deux courbes lisses disjointes et que $\pi^{-1}(\gamma) = \tilde{\gamma} \cup E$ est réunion de trois courbes lisses sans point triple et à intersections transverses.

Plus généralement, si γ est réunion de m droites distinctes dans $\mathbf{C}^2$ passant par l'origine, sa transformée stricte est réunion de m courbes lisses disjointes coupant chacune la courbe exceptionnelle en un point et transversalement.

Exemple 2. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = x^2 - y^3$. Alors $\tilde{\gamma}$ est l'adhérence de $\{([z], \omega) \in S \mid \omega = (t^3, t^2)$ et $t \in \mathbf{C}^*\}$, qui est $\{([t, 1], (t^3, t^2)) \in S \mid t \in \mathbf{C}\} \subset S_1$. Dans les cartes, $\psi_0(\tilde{\gamma} \cap S_0)$ est l'adhérence de $\{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = t^{-1},\ v = t^3,\ t \in \mathbf{C}^*\}$ et $\psi_1(\tilde{\gamma} \cap S_1)$ celle de $\{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = t, v = t^2, t \in \mathbf{C}^*\}$. Ecrit sans paramètre:

$$\psi_0(\tilde{\gamma} \cap S_0) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u^3 v = 1\}$$

$$\psi_1(\tilde{\gamma} \cap S_1) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u^2 = v\}.$$

Par suite $\tilde{\gamma}$ est une courbe lisse, et $\pi^{-1}(\gamma) = \tilde{\gamma} \cup E$ est réunion de deux courbes lisses se coupant au seul point $\psi_1^{-1}(0, 0)$. Cette intersection n'étant pas transverse, on itère le procédé en espérant éliminer ce « défaut ».

Au voisinage de ce point d'intersection, $\pi^{-1}(\gamma)$ définit un germe $\underline{\delta}$; on le représente par la courbe δ, zéro de la fonction $g \in \mathcal{O}(C^2)$ définie par $g(x, y) = y(x^2 - y)$. La transformée stricte est donnée dans les cartes par

$$\psi_0(\tilde{\delta} \cap S_0) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u(v-u) = 0\}$$
$$\psi_1(\tilde{\delta} \cap S_1) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u^2 v = 1\}.$$

Par suite $\tilde{\delta}$ est réunion de deux courbes lisses se coupant en un seul point et transversalement; d'autre part $\pi^{-1}(\delta)$ est réunion de trois courbes lisses se coupant en un seul point, et transversalement deux à deux.

Au voisinage de ce point triple, $\pi^{-1}(\delta)$ définit un germe $\underline{\varepsilon}$. La remarque à la fin de l'exemple 1 montre que $\underline{\varepsilon}$ conduit à une transformée stricte qui est réunion de trois courbes lisses disjointes coupant la courbe exceptionnelle transversalement et en des points distincts.

En composant ces trois éclatements, on obtient une *résolution de la singularité* $\underline{\gamma}$ *plongée* dans $\mathbf{C}^2$, au sens du théorème 8.4 de [17]. En d'autres termes, on obtient une variété lisse M et une application $\zeta\colon M \to \mathbf{C}^2$ ayant les propriétés suivantes:

1) ζ induit un isomorphisme de $M - \zeta^{-1}(0)$ sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$;

2) l'adhérence $\widetilde{\zeta^{-1}}(\gamma)$ de $\zeta^{-1}(\gamma^*)$ dans M est une courbe lisse;

3) $\zeta^{-1}(\gamma)$ est une réunion de courbes lisses sans point triple qui se coupent transversalement.

Revenons au cas général et soit à nouveau n la multiplicité de f à l'origine; nous supposons comme à la section 2 que la droite d'équation $x = 0$ n'est pas une tangente de $\underline{\gamma}$. Nous appellerons *transformée stricte de la fonction* f et nous noterons $\tilde{f}$ la fonction définie pour tout $(u, v) \in \Delta_2 = \psi_0(\pi^{-1}(D_2) \cap S_0)$ par $\tilde{f}(u, v) = v^{-n} f(v, uv)$.

Proposition 6. Avec les notations déjà introduites:

(j) $\psi_0(\tilde{\gamma}_D \cap S_0) = \{(u, v) \in \Delta_2 \mid \tilde{f}(u, v) = 0\}$.

(jj) Si $\underline{f}$ est irréductible, alors $\tilde{f}$ s'annule en un seul point de E_0 et y définit un germe $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ qui est irréductible.

(jjj) Supposons $\underline{f}$ irréductible et soient n et $\tilde{n}$ les multiplicités de f et $\tilde{f}$; alors $\tilde{n} \leqslant n$ et $\tilde{n} < n$ si et seulement si E_0 est une tangente à $\tilde{\gamma}$.

Preuve. Supposons $(u, v) \in \psi_0 (\tilde{\gamma}_D \cap S_0)$; alors $\pi_0 (u, v) = (v, uv) \in \gamma_D$, donc $f(v, uv) = 0$. Si $v \neq 0$, cela implique $\tilde{f}(u, v) = 0$ par définition de $\tilde{f}$; c'est encore vrai par continuité si $v = 0$.

Supposons $(u, v) \in \Delta_2$ avec $\tilde{f}(u, v) = 0$, alors $f(\pi_0 (u, v)) = v^n \tilde{f}(u, v) = 0$, donc $\psi_0^{-1} (u, v) \in \pi^{-1} (\gamma_D) \cap S_0$. Si $v \neq 0$, cela s'écrit $\psi_0^{-1} (u, v) \in \tilde{\gamma}_D \cap S_0$. Si $v = 0$, la fonction $u \mapsto \tilde{f}(u, 0)$ est de la forme $u \mapsto c \prod (u - \lambda_j)^{sj}$ avec c non nul et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts (voir la proposition 5). Elle s'annule donc aux points $(\lambda_j, 0)$ de E_0; ceux-ci étant en nombre fini, leurs images inverses par ψ_0 sont par continuité dans $\tilde{\gamma}_D \cap S_0$. L'assertion (j) en résulte.

Si $\underline{f}$ est irréductible, il n'y a qu'un λ_j (voir la preuve de la proposition 4); $\tilde{f}$ ne s'annule qu'en un point de E_0 et y définit un germe $\underline{\tilde{f}}$. L'application π induit un homéomorphisme de $S - E$ sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$, donc aussi de $\pi^{-1} (\gamma_D^*) = \tilde{\gamma}_D - (\tilde{\gamma}_D \cap E)$ sur γ_D^*. L'assertion (jj) résulte donc de la proposition 2.

Quitte à changer linéairement les coordonnées, on peut supposer que la tangente à $\underline{\gamma}$ est l'axe d'équation $y = 0$. Pour tout $(x, y) \in D_2$, on a maintenant

$$f(x, y) = y^n + b_1 (x) y^{n-1} + \ldots + b_n (x)$$

et $b_i (x) = x^{i+1} c_i (x)$ où c_i est holomorphe à l'origine. Pour tout $(u, v) \in \Delta_2$, on a donc

$$\tilde{f}(u, v) = u^n + vc_1 (v) u^{n-1} + \ldots + vc_n (v) ,$$

d'où en particulier $\tilde{n} \leqslant n$. Si $\tilde{n} = n$, alors $\tilde{f}(u, v) = \sum \tilde{h}_j (u, v)$ (somme de n à l'infini) avec $\tilde{h}_n (u, v) = u^n + vk (u, v)$ pour un polynôme homogène k ad hoc, nul ou de degré $n - 1$; dans ce cas, la courbe E_0 d'équation $v = 0$ n'est pas tangente à $\psi_0 (\tilde{\gamma}_D \cap S_0)$. Si $\tilde{n} < n$, alors $\tilde{f}(u, v) = \sum \tilde{h}_j (u, v)$ (somme de $\tilde{n}$ à l'infini) avec $\tilde{h}_{\tilde{n}}$ divisible par v; dans ce cas, E_0 est tangente à $\psi_0 (\tilde{\gamma}_D \cap S_0)$. ∎

Exemple 3. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = x^5 + y^2$. On peut montrer brutalement que $\underline{f}$ est irréductible. On peut aussi observer que la paire formée de $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ et de γ^* se rétracte par déformation sur la paire formée de $\mathbf{S}^3 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \, | x|^2 + |y|^2 = 1\}$ et d'un nœud du tore: la rétraction applique un point (x, y) sur l'intersection avec $\mathbf{S}^3$ de l'image du chemin $\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}^2 \\ t \mapsto (t^2 x, t^5 y) \end{cases}$. En particulier γ^* est connexe et $\underline{f}$ est bien irréductible.

La transformée stricte de f est donnée par

$$\tilde{f}(u, v) = v^{-2}(v^5 + (uv)^2) = u^2 + v^3$$

qui est comme f de multiplicité 2. La tangente de $\underline{\tilde{f}}$ est la droite d'équation $u = 0$, qui est transverse à E_0.

Soient alors $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $g(x, y) = x^3 + y^2$ de sorte que $\underline{g} = \underline{\tilde{f}}$ (pas $g(x, y) = x^2 + y^3$ qui aurait comme tangente la droite d'équation $x = 0$). On a $\tilde{g}(u, v) = u^2 + v$, qui est de multiplicité 1, et dont la tangente à l'origine est bien E_0.

Exemple 4. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = y^5 + x^5 y + g(x, y)$ avec g de multiplicité 8 au moins. Montrons que $\underline{f}$ est réductible.

On a $\tilde{f}(u, v) = u^5 + uv + h(u, v)$ avec h d'ordre 3 au moins. Donc $\underline{\tilde{f}}$ a deux tangentes, d'où l'assertion par les propositions 5 et 6 (jj).

II. SINGULARITÉS NORMALES DANS $\mathbf{C}^3$

II.1. Ensembles normaux

Si X est un ensemble analytique, $X_{\text{rég}}$ désigne l'ouvert de ses *points réguliers*; on sait qu'il est dense dans X. (Voir le corollaire de la proposition 1 si X est une courbe plane, l'argument de la proposition 7 ci-dessous si X est une hypersurface dans $\mathbf{C}^k$, et le théorème III. C.3 de [8] en général.)

Rappelons qu'un ensemble X est *irréductible* en un point p si X n'est pas au voisinage de p réunion de deux sous-ensembles propres. Dans ce cas, on peut trouver un voisinage de p dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe. Réciproquement, s'il existe un bon voisinage U de P dans X dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe, alors X est irréductible en p. (Voir la proposition 2 si X est une courbe plane, et la fin de la section III.C de [8] pour le cas général.) Le terme de « bon voisinage » pour U signifie qu'il existe une base de voisinages $\{U_\alpha\}$ de p dans X telle que chaque $U_\alpha - \{p\}$ soit un rétracte par déformation de $U - \{p\}$; voir [21].