Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: I.2. Les tangentes en un point d'une courbe plane
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

sition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} D(r)^* \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr] & & \gamma_D^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & D_1^* & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi: D(r) \to \gamma_D$ de la forme $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

COROLLAIRE. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques.*

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de $\mathbf{C}^k$) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \ldots + a_k t^{m+k} + \ldots (a_0 \neq 0);$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geqslant n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \ldots + a_k x^{(m+k)/n} + \ldots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. LES TANGENTES EN UN POINT D'UNE COURBE PLANE

Soient k un entier positif et $\mathrm{Ev}: {}_k\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

PROPOSITION 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien.* En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbf{C}[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\mathrm{Ev}(P) = \rho\sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = RS$, $\mathrm{Ev}(R) = \rho$ et $\mathrm{Ev}(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.

Preuve. Notons $\mathrm{Ev}(P)(t) = P(0, t) = \prod (t-\lambda_j)^{s_j}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincts. (Dans cette preuve, les produits $\prod$ portent sur l'indice j de 1 à n et les $\prod'$ portent sur j de 2 à n). Nous voulons montrer par induction sur n qu'il existe des polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = \prod P_j$ et $\mathrm{Ev}(P_j)(t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$. Cette assertion étant trivialement vraie pour $n = 1$, on peut supposer $n \geqslant 2$ et qu'elle est vraie pour tous les polynômes dont l'évaluation a au plus $n - 1$ racines distinctes.

Supposons d'abord que $P(0, 0) = 0$ et que $\mathrm{Ev}(P) = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Le théorème de préparation permet d'écrire

$$P(x; t) = u(x, t)\,[t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)]$$

où u est un polynôme de ${}_k\mathcal{O}[t]$ inversible dans ${}_{k+1}\mathcal{O}$ et où les a_j sont des germes dans ${}_k\mathcal{O}$ qui sont nuls à l'origine. Par suite

$$Ev(P)(t) = u(0, t)\,t^{s_1} = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$$

et $u(0, t) = \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Par hypothèse d'induction, il existe $P_2, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $u = \prod' P_j$ et $P_j(0, t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$ pour $j = 2, \ldots, n$. On achève en posant

$$P_1(x, t) = t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)\,.$$

Supposons au contraire que $P(0, 0) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P(0, \lambda) = 0$ et P^T le polynôme défini par $P^T(x, t) = P(x, t+\lambda)$. Alors P^T est un produit de n facteurs P_j^T par l'argument précédent et on achève en posant $P_j(x, t) = P_j^T(x, t-\lambda)$ pour $j = 1, \ldots, n$. ■

Notons qu'il existe d'autres définitions (équivalentes à celle de la proposition) pour un anneau local d'être hensélien; voir par exemple [AC, III, §4, ex. 3].

Soient $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D comme au début de la section 1. Ecrivons la série de Taylor de f à l'origine sous la forme $f(x, y) = \sum h_j(x, y)$ (somme sur j de p à l'infini), où h_j est un polynôme homogène de degré j en x et y et où $h_p \neq 0$. Le polynôme h_p est un produit de facteurs linéaires. Quitte à modifier les axes de coordonnées, on peut supposer que h_p ne s'annule pas sur la droite d'équation $x = 0$, donc que $h_p(x, y) = c \prod (y-\lambda_j x)^{s_j}$ avec c un nombre complexe, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des nombres complexes distincts, et $s_1, \ldots, s_m$ des entiers positifs de somme p. Les droites d'équation $y = \lambda_j x$ sont par définition les *tangentes* de $\underline{\gamma}$. Pour chaque entier $j \geqslant p$, on a $h_j(0, y)$ proportionnel à y^j, et $h_p(0, y) = cy^p$ avec $c \neq 0$. Par suite, f est une fonction régulière d'ordre p en y; avec les notations du début de la section 1, on a donc $p = n$. Cet entier s'appelle la *multiplicité* de f à l'origine; il ne dépend pas des coordonnées choisies sur $\mathbf{C}^2$.

PROPOSITION 5. Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, alors $\underline{f}$ est réductible.

Preuve. Comme

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = \sum_{j=n}^{\infty} h_j(x, y)$$

l'ordre du zéro de a_i à l'origine est au moins i ($i = 1, \ldots, n$). Nous écrirons

$$f(x, y) - h_n(x, y) = b_1(x)\, y^{n-1} + b_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + b_n(x)$$

et $b_i(x) = x^{i+1} c_i(x)$, où c_i représente un germe holomorphe à l'origine ($i = 1, \ldots, n$).

Si u et v décrivent de petits voisinages de l'origine dans $\mathbf{C}$, la fonction $(u, v) \mapsto f(v, uv)$ est divisible par v^n. Définissons $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ par $\tilde{f}(u, v) = v^{-n} f(v, uv)$; on a donc

$$\tilde{f}(u, v) = h_n(1, u) + vc_1(v)\, u^{n-1} + vc_2(v)\, u^{n-2} + \ldots + vc_n(v)\,.$$

L'évaluation Ev: ${}_1\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ associe au polynôme $\tilde{f} \in {}_1\mathcal{O}[u]$ le polynôme $u \mapsto h_n(1, u)$ de $\mathbf{C}[u]$.

Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, il résulte de la proposition 4 que $\tilde{f}$ est un produit dans ${}_1\mathcal{O}[u]$ de polynômes unitaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ de degrés respectifs $r < n$ et $s < n$. Définissons alors g et h dans ${}_1\mathcal{O}[y]$ par $g(x, y) = x^r \tilde{g}(y/x, x)$ et $h(x, y) = x^s \tilde{h}(y/x, x)$. Alors $f = gh$ et $\underline{f}$ est réductible. ■

La signification géométrique de $\tilde{f}$ dans la preuve ci-dessus sera éclairée au numéro suivant.

Par exemple, le polynôme réductible xy définit une courbe ayant deux tangentes à l'origine. La réciproque à la proposition 5 n'est pas vraie car le polynôme réductible $x(x^2 - y^3)$ définit une courbe n'ayant qu'une tangente à l'origine.

I.3. ECLATEMENT ET IRRÉDUCTIBILITÉ

Pour tout entier positif k, nous noterons h la projection canonique de $\mathbf{C}^{k+1} - \{0\}$ sur l'espace projectif P^k; nous écrirons $(\omega_0, \ldots, \omega_k)$ les coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{C}^{k+1}$ et $[z_0, \ldots, z_k]$ les coordonnées homogènes d'un point de P^k. Introduisons la variété