**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 25 (1979)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SINGULARITÉS DE KLEIN

**Kapitel:** III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

**Autor:** de la Harpe, P. / Siegfried, P.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-50380

Si $f$: $X \to Y$ est la section nulle du fibré $\pi$, (de sorte que le $A$ de la proposition 8 est vide), il est alors évident que $f$ ne se relève pas, car cela impliquerait que le revêtement $E \to Y_{\text{sing}} = f(X)$ soit trivial.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Y} \arrow[d, "\nu_X"] \\ X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

## III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

### III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Soient $n$ et $q$ des entiers, avec $n$ positif et $q \leqslant n$. Nous noterons $A_{n,q}$ la *surface* $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q}\}$.

Si $n = 1$, les surfaces ainsi définies sont toutes lisses: l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy^{1-q})$ de $\mathbf{C}^3$ applique $A_{1,n}$ sur l'hyperplan d'équation $z = 0$. De même, si $q = n$, l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x - z^n, y, z)$ applique $A_{n,n}$ sur l'hyperplan d'équation $x = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 2$ et $q < n$ sauf mention expresse du contraire.

Si $q = n - 1$, les dérivées partielles du polynôme $z^n - xy^{n-q} = z^n - xy$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, et $A_{n,n-1}$ est lisse en dehors de ce point (donc normale en vertu d'un théorème d'Oka rappelé en II.2). Si $q \leqslant n - 2$, la surface $A_{n,q}$ est lisse en dehors de la droite d'équations $y = z = 0$; nous vérifions ci-dessous que ces points sont effectivement tous singuliers; la proposition 7 montre donc que $A_{n,q}$ n'est pas normale.

Soit $G_{n,q}$ le groupe des isomorphismes de $C^2$ de la forme $(s, t) \mapsto (\zeta^q s, \zeta t)$ où $\zeta$ est une racine $n$-ième de l'unité; c'est un *groupe cyclique* d'ordre $n$. Nous noterons $X_{n,q}$ l'*ensemble des orbites*, muni de sa structure canonique d'ensemble analytique normal.

Si $q = 0$, l'ensemble $X_{n,0}$ est lisse: l'application $(s, t) \mapsto (s, t^n)$ passe au quotient et définit un isomorphisme de $X_{n,0}$ sur $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})) \approx \mathbf{C}^2$. Les espaces $X_{n,q}$ et $X_{n,q'}$ sont évidemment identiques si $q' \equiv q$ (modulo $n$); il suffit donc d'étudier les $X_{n,q}$ pour lesquels $1 \leqslant q < n$ (voir de plus la proposition 13).

Considérons le morphisme $\tilde{\phi}_{n,q}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ défini par $\tilde{\phi}_{n,q}(s, t) = (s^n, t^n, st^{n-q})$; son image est dans $A_{n,q}$ et il définit par passage au quotient un morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$. Nous écrirons aussi $\tilde{\phi}$ et $\phi$ au lieu de $\tilde{\phi}_{n,q}$ et $\phi_{n,q}$.

PROPOSITION 9. Le morphisme $\phi$ induit un *homéomorphisme* de l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ sur $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid y \neq 0\}$. Si $n$ et $q$ sont premiers entre eux, $\phi$ lui-même est un homéomorphisme de $X_{n,q}$ sur $A_{n,q}$.

*Preuve.* Montrons d'abord que $\tilde{\phi}$ est surjectif et que l'image inverse par $\tilde{\phi}$ de tout point autre que l'origine est formée de $n$ points.

Soit $P = (x, y, z) \in A_{n,q}$ avec $y \neq 0$. Choisissons une racine $n$-ième $t$ de $y$ et posons $s = zt^{-n+q}$. Alors

$$\tilde{\phi}(s, t) = (z^n y^{-n+q}, y, z) = (x, y, z) .$$

Soit $(s', t') \in \mathbf{C}^2$ avec $\tilde{\phi}(s', t') = \tilde{\phi}(s, t)$. Il existe des racines $n$-ièmes $\zeta$ et $\eta$ de l'unité avec $s' = \zeta s$, $t' = \eta t$ et $\zeta \eta^{n-q} = 1$. Par suite $\tilde{\phi}^{-1}(P)$ a $n$ points.

Soit $Q = (x, 0, 0) \in A_{n,q}$ avec $x \neq 0$. Choisissons une racine $n$-ième $s$ de $x$. Alors $\tilde{\phi}^{-1}(Q) = \{(\zeta s, 0) \in \mathbf{C}^2 \mid \zeta \in \mathbf{C}$ et $\zeta^n = 1\}$ a $n$ points.

Le groupe $G_{n,q}$ agit librement sur $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$, et même sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ lorsque $n$ et $q$ sont premiers entre eux. Il en résulte que la restriction de $\phi$ à l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ est injective dans tous les cas, et que $\phi$ lui-même est une bijection si $(n, q) = 1$.

Montrons par exemple que $\phi$ est un homéomorphisme si $(n, q) = 1$. Pour tout nombre réel positif $r$, soient $K_r$ l'image dans $X_{n,q}$ de

$$\{(s,t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| \leqslant r \text{ et } |t| \leqslant r\}$$

et $L_r$ l'intersection avec $A_{n,q}$ de

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid |x| \leqslant r^n,\ |y| \leqslant r^n,\ |z| \leqslant r^{1+n-q}\}.$$

La restriction de $\phi$ à $K_r$ est une bijection continue du compact $K_r$ sur le compact $L_r$; c'est donc un homéomorphisme. Par suite, $\phi$ est un homéomorphisme. ∎

Corollaire. Si $(n, q) = 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière à l'origine.*

*Preuve.* Pour tout $r > 0$, le complémentaire de l'origine dans $L_r$ est homéomorphe au complémentaire du point central dans $K_r$. Il se rétracte donc par déformation sur l'espace lenticulaire que définit l'action de $G_{n,q}$ sur une petite sphère $\mathbf{S}^3$ centrée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. (L'intérieur de $L_1$ est donc un bon voisinage de l'origine dans $A_{n,q}$ au sens de la section II.1.) En particulier, le groupe fondamental du complémentaire de l'origine dans $L_r$ n'est pas trivial. ■

Remarquons que c'est aussi un corollaire immédiat de la proposition 9 que $(A_{n,q})_{\text{rég}}$ est « connexe à l'origine »: $(L_r)_{r \in \mathbf{R}_+^*}$ est une base de voisinages de l'origine dans $A_{n,q}$ et $L_r \cap (A_{n,q})_{\text{rég}}$ est connexe pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$. D'autre part, il est facile de vérifier que le polynôme $z^n - xy^{n-q}$ est irréductible dans ${}_2\mathcal{O}[z]$, donc aussi dans ${}_3\mathcal{O}$ (voir [8], lemme II.B.5). On vérifie ainsi un cas particulier d'une affirmation énoncée à la section II.1.

Proposition 10. Supposons $q \leqslant n - 2$. Soient $c \in \mathbf{C}^*$ et $Q = (c, 0, 0) \in A_{n,q}$. Alors le voisinage $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\}$ de $Q$ dans $A_{n,q}$ est isomorphe au produit direct du disque $D = \{\xi \in \mathbf{C} \mid |\xi| < 1\}$ et de la courbe plane $\gamma = \{(y, z) \in \mathbf{C}^2 \mid z^n = y^{n-q}\}$.

*Preuve.* Soit $\rho: D \to \mathbf{C}$ la fonction holomorphe définie par $\rho(\xi)^n = 1 + \xi$ pour tout $\xi \in D$ et $\rho(0) = 1$. Soit $d$ une racine $(n-q)$-ième de $1/c$. Considérons l'application $\alpha: D \times \gamma \to \mathbf{C}^3$ définie par $\alpha(\xi, y, z) = (c(1+\xi), dy, \rho(\xi) z)$. Pour tout $(\xi, y, z) \in D \times \gamma$, on a

$$(\rho(\xi) z)^n - c(1+\xi)(dy)^{n-q} = (1+\xi)(z^n - y^{n-q}) = 0 .$$

Par suite $\alpha$ définit un morphisme

$$D \times \gamma \to \{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\} .$$

qui applique $(0, 0, 0)$ sur $Q$ et d'inverse donné par

$$(x, y, z) \mapsto \left(c^{-1}x - 1, d^{-1}y, \left(\rho(c^{-1}x - 1)\right)^{-1} z\right) . \blacksquare$$

Corollaire. Supposons $q \leqslant n - 2$. Si $(n, q) \neq 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière en tout point de l'axe* d'équations $y = z = 0$. Si $(n, q) = 1$, c'est une variété topologique au voisinage de $Q$ qui n'est pas normale en $Q$.

*Preuve.* Si $(n, q) \neq 1$, la courbe $\gamma$ a plusieurs branches à l'origine; les intersections de petites sphères centrées à l'origine dans $\mathbf{C}^2$ avec

$\gamma - \{0\}$ ne sont donc pas connexes et $A_{n,q}$ est bien topologiquement singulière en $Q$. Si $(n, q) = 1$, la surface est une variété topologique au voisinage de $Q$ en vertu du corollaire à la proposition 3. Reste à montrer que $D \times \gamma$ n'est pas normal. Cela résulte de la proposition 7, ou de l'argument direct qui suit.

Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $an + b(n-q) = 1$, et $\psi: D \times \gamma \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\psi(\xi, y, z) = \begin{cases} y^a z^b & \text{si} \quad yz \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = z = 0 \end{cases}$. Alors $\psi$ n'est pas holomorphe, mais $\psi^n$ l'est car $\psi(\xi, y, z)^n = y$. L'anneau des germes en $Q$ de fonctions holomorphes n'est donc pas intégralement clos. ■

Proposition 11. Pour tout couple $(n, q)$ avec $n \geqslant 2$ et $q \leqslant n - 1$, le morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$ est la normalisation de $A_{n,q}$. C'est un isomorphisme si et seulement si $q = n - 1$.

*Preuve.* Cela résulte de ce qui précède et du théorème de Cartan rappelé à la section II.1. ■

On pourrait montrer que les surfaces $A_{n,q}$, $A_{n,q-n}$, $A_{n,q-2n}$, ... sont non isomorphes deux à deux; par suite, $X_{n,q}$ est la normalisation d'une infinité d'ensembles analytiques distincts.

## III.2. Les discriminants des $A_{n,q}$ et les ouverts $A_{n,q}^{**}$

Soient à nouveau $n$ et $q$ des entiers avec $n \geqslant 2$ et $q < n$. Notons $F \in {}_2\mathcal{O}[z]$ le polynôme $z^n - xy^{n-q}$. A un facteur numérique près, son discriminant est une puissance de $xy^{n-q}$. Soient en effet $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines, qui sont dans une extension convenable du corps des quotients de ${}_2\mathcal{O}$; alors

$$\mathrm{Dis}(F) = \prod \frac{\partial F}{\partial z}(\lambda_j) = \prod n\lambda_j^{n-1} = \left(\prod n\lambda_j^n\right)\left(\prod \lambda_j\right)^{-1}$$

$$= n^n (xy^{n-q})^n (-1)^n F(x, y, 0)^{-1} = (-1)^{n-1} n^n (xy^{n-q})^{n-1}$$

(tous les produits étant sur $j$ de 1 à $n$). Comme à la section II.2, désignons par $\pi: A_{n,q} \to \mathbf{C}^2$ la restriction à $A_{n,q}$ de la projection canonique $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Nous noterons $\mathbf{C}^{**}$ l'espace $\mathbf{C}^2$ privé du lieu discriminant $\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy = 0\}$ et $A_{n,q}^{**}$ l'image inverse par $\pi$ de $\mathbf{C}^{**}$. La proposition 7 ou un examen direct montre que $\pi$ se restreint en un revêtement holomorphe à $n$ feuilles

$$\pi^{**}: A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}.$$

Nous notons ci-dessous Fond $(Y)$ le groupe fondamental d'un espace topologique $Y$; nous n'aurons à considérer que des cas où ce groupe est abélien, ce qui nous autorise à ne pas marquer de point base sur $Y$.

Le groupe fondamental de $\mathbf{C}^{**} = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ est le groupe abélien libre sur deux générateurs représentés par les lacets

$$\begin{cases} [0,1] \to \mathbf{C}^* \\ t \mapsto (\underline{e}(t), 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} [0,1] \to \mathbf{C}^* \\ t \to (1, \underline{e}(t)) \end{cases}$$

avec $\underline{e}(t) = \exp(i2\pi t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Nous identifierons désormais Fond $(\mathbf{C}^{**})$ et ces deux générateurs à $\mathbf{Z}^2$ et sa base canonique.

Proposition 12. Le groupe fondamental de $A_{n,q}^{**}$ est abélien libre sur deux générateurs. Son image dans $\mathbf{Z}^2 =$ Fond $(\mathbf{C}^{**})$ définie par le revêtement $\pi^{**}$ est engendrée par $(n, 0)$ et $(q, 1)$.

*Preuve.* L'application $\varphi$ de $\{u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid uv \neq 0\}$ dans $A_{n,q}^{**}$ définie par $\varphi(u, v) = (u^n v^q, v, uv)$ est un isomorphisme d'inverse $(x, y, z) \mapsto (z/y, y)$. Donc Fond $(A_{n,q}^{**})$ est bien isomorphe à $\mathbf{Z}^2$, et son image par $\pi^{**}$ dans Fond $(\mathbf{C}_{xy}^{**})$ est aussi l'image de $\mathbf{Z}^2 =$ Fond $(\mathbf{C}_{uv}^{**})$ dans $\mathbf{Z}^2 =$ Fond $(\mathbf{C}_{xy}^{**})$ induite par

$$\begin{cases} \{(u,v) \in \mathbf{C}^2 \mid uv \neq 0\} \to \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy \neq 0\} \\ \qquad (u,v) \mapsto (u^n v^q, v) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Remarquons que les applications $g : \begin{cases} A_{n,q-n}^{**} \to A_{n,q}^{**} \\ (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, \eta, \zeta/\eta) \end{cases}$ et $h : \begin{cases} A_{n,q}^{**} \to A_{n,q-n}^{**} \\ (x, y, z) \mapsto (x, y, yz) \end{cases}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Continuons à noter $X_{n,q}$ [respectivement $X_{n,q-n}$] l'espace normalisé de $A_{n,q}$ [resp. $A_{n,q-n}$], mais « oublions » provisoirement sa description comme quotient de $\mathbf{C}^2$ par $G_{n,q}$; comme illustration de la section II.3, nous allons montrer que $X_{n,q}$ et $X_{n,q-n}$ sont isomorphes.

Soit $\phi$: $X_{n,q-n} \to A_{n,q-n}$ la normalisation; on peut considérer $g$ comme une application de $\phi^{-1}(A_{n,q-n}^{**})$ dans $A_{n,q}^{**}$. Elle est évidemment bornée, et se prolonge en $\tilde{g}$: $X_{n,q-n} \to A_{n,q}$. La proposition 8 affirme que $\tilde{g}$ se relève en $G$: $X_{n,q-n} \to X_{n,q}$. De même $h$ (ou son prolongement évident $A_{n,q} \to A_{n,q-n}$) se relève en $H$: $X_{n,q} \to X_{n,q-n}$. Comme $G$ et $H$ sont inverses l'un de l'autre une fois restreints aux ouverts non vides $U = \phi^{-1}(A_{n,q-n}^{**})$ et $G(U)$, on a $G = H^{-1}$.

La proposition suivante montre qu'il y a d'autres isomorphismes entre les $X_{n,q}$.

PROPOSITION 13. Pour tout entier positif $d$, les espaces $X_{dn,dq}$ et $X_{n,q}$ sont isomorphes.

*Première preuve.* L'application $g: \begin{cases} A^{**}_{dn,dq} \to A^{**}_{n,q} \\ (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\zeta^n \eta^{-n+q}, \eta, \zeta) \end{cases}$ est un isomorphisme d'inverse $h$ décrit par $h(x, y, z) = (x^d, y, z)$. Le même argument que ci-dessus montre que $g$, considérée comme application de $\phi_{dn,dq}{}^{-1}(A^{**}_{dn,dq})$ dans $A^{**}_{n,q}$, se relève et se prolonge en $G: X_{dn,dq} \to X_{n,q}$ et que $h$ définit de même $H: X_{n,q} \to X_{dn,dq}$ avec $G = H^{-1}$.

*Seconde preuve.* Soit $\tilde{\varphi}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ défini par $\tilde{\varphi}(s, t) = (s, t^d)$. Pour tout $k \in \{0, 1, ..., dn - 1\}$, considérons $\underline{e}(k/dn)$ dans $G_{dn,dq}$ et $\underline{e}(k/n)$ dans $G_{n,q}$. Alors

$$\tilde{\varphi}\big(\underline{e}(k/dn)(s, t)\big) = \big(\underline{e}(k/dn)^{dq} s, (\underline{e}(k/dn)\, t)^d\big)$$
$$= \big(\underline{e}(k/n)^q s, \underline{e}(k/n)\, t^d\big) = \underline{e}(k/n)\, \tilde{\varphi}(s, t)$$

et $\tilde{\varphi}$ définit un morphisme $\varphi: X_{dn,dq} \to X_{n,q}$. Il est évident que $\tilde{\varphi}$ et $\varphi$ sont surjectifs.

Montrons que $\varphi$ est injectif. Soient $(u, v)$ et $(s, t)$ des points de $\mathbf{C}^2$ dont les images par $\tilde{\varphi}$ sont congrues modulo $G_{n,q}$. Il existe donc $k \in \{0, 1, ..., n - 1\}$ tel que $(u, v^d) = \big(\underline{e}(k/n)^q s,\ \underline{e}(k/n)\, t^d\big)$. Par suite, il existe aussi $j \in \{0, 1, ..., d - 1\}$ avec $v = \underline{e}(j/d)\, \underline{e}(k/dn)\, t$. La transformation $\underline{e}\big((jn+k)/dn\big)$ de $G_{dn,dq}$ applique alors $(s, t)$ sur

$$\big(\underline{e}\big((jn+k)/dn\big)^{dq} s, \underline{e}\big((jn+k)/dn\big)\, t\big)$$
$$= \big(\underline{e}(jq)\, \underline{e}(kq/n)\, s, \underline{e}(j/d)\, \underline{e}(k/dn)\, t\big) = (u, v),$$

de sorte que $(s, t)$ et $(u, v)$ sont congrus modulo $G_{dn,dq}$.

Par suite $\varphi$ est bijectif. On peut montrer comme dans la preuve de la proposition 9 que $\varphi$ est un homéomorphisme. Comme $\varphi^{-1}$ est un morphisme sauf a priori au point singulier et comme $X_{n,q}$ est normal, $\varphi^{-1}$ est un morphisme en tout point et $\varphi$ est un isomorphisme. ∎

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'automorphisme $(u, v) \mapsto (v, u)$ de $\mathbf{C}^2$ définit, lorsque $qq' \equiv 1$ (modulo $n$), un isomorphisme de $X_{n,q}$ sur $X_{n,q'}$. On peut montrer qu'il n'existe *pas d'autres isomorphismes* que ceux écrits jusqu'ici: si $X_{n,q}$ et $X_{n',q'}$ sont isomorphes avec $(n, q) = (n', q') = 1$, alors $n = n'$ et $q = q'$ ou $qq' \equiv 1$ (modulo $n$); voir [21], théorème 2.

Si $q = n - 1$, nous avons vu que $\phi$ est un isomorphisme de $X_{n,n-1}$ sur $A_{n,n-1}$; en d'autres termes que la *dimension de plongement* de la singularité normale $X_{n,n-1}$ est 3. On sait calculer en général la dimension de plongement de $X_{n,q}$: si $(n, q) = 1$ et avec les notations de la section IV.2, elle vaut $3 + \sum_{k=1}^{s} (b_k - 2)$. En particulier, la réciproque à l'assertion ci-dessus est aussi vraie: si $(n, q) = 1$ et si $X_{n,q}$ se plonge dans $\mathbf{C}^3$, alors $q = n - 1$. Voir [22], fin du § 3.

## III.3. Classification

Soit $\Gamma$ un germe de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$. Reprenons les notations de la section II.2; supposons que le lieu discriminant exhibe une singularité consistant en un point double avec croisement normal — en d'autres termes, supposons qu'on puisse choisir les coordonnées de telle sorte que $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid xy = 0\}$. Nous noterons $D_2^{**}$ l'espace $D_2 - \gamma_D$ et $\Gamma_D^{**}$ son image inverse par $\pi$; la projection se restreint en un revêtement à $n$ feuilles $\pi^{**}: \Gamma_D^{**} \to D_2^{**}$. On identifie comme à la section précédente le groupe fondamental de $D_2^{**}$ à $\mathbf{Z}^2$.

Proposition 14. Il existe un polycylindre $E_2$ dans $\mathbf{C}^2$, un morphisme $\rho^{**}: \Gamma_D^{**} \to E_2^{**}$ et des entiers $n$, $q$ avec $0 \leqslant q < n$ et $(n, q) = 1$ tels que $\rho^{**}$ induise une injection de Fond $(\Gamma_D^{**})$ sur le sous-groupe de Fond $(E_2^{**}) = \mathbf{Z}^2$ engendré par $(n, 0)$ et $(q, 1)$.

*Preuve.* Soit $G$ l'image de Fond $(\Gamma_D^{**})$ dans $\mathbf{Z}^2$ définie par $\pi^{**}$. C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{Z}^2$ car $\pi^{**}$ est un revêtement fini. Par suite $G$ contient des éléments de la forme $(k, 0)$; soit

$$a = \inf \{ |k| \mid (k, 0) \in G \quad \text{et} \quad k \neq 0 \} .$$

On peut choisir un vecteur $(b, c)$ formant avec $(a, 0)$ une base de $G$, tel que $0 \leqslant b < a$ et $c > 0$.

Soit $d$ le plus grand commun diviseur de $a$ et $b$ (avec $d = a$ si $b$ est nul). Soient $E_2 = \{ (u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid (u^d, v^c) \in D_2 \}$ et $E_2^{**} = \{ (u, v) \in E_2 \mid uv \neq 0 \}$.

L'application $\kappa^{**}\colon (u, v) \mapsto (u^d, v^c)$ de $E_2^{**}$ sur $D_2^{**}$ est un revêtement holomorphe connexe à $dc$ feuilles, et induit une injection de Fond $(E_2^{**})$ sur le sous-groupe de $\mathbf{Z}^2 = \text{Fond}\,(D_2^{**})$ engendré par $(d, 0)$ et $(0, c)$. Ce groupe contenant $G$, il existe un morphisme $\rho^{**}$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} & E_2^{**} \arrow[d, "\kappa^{**}"] \\ \Gamma_D^{**} \arrow[ur, "\rho^{**}"] \arrow[r, "\pi^{**}"] & D_2^{**} \end{tikzcd}$$

commutatif. Au niveau des groupes fondamentaux, $\rho^{**}$ induit un isomorphisme de Fond $(\Gamma_D^{**})$ sur le sous-groupe de $\mathbf{Z}^2 = \text{Fond}\,(E_2^{**})$ engendré par $(a/d, 0/c)$ et $(b/d, c/c)$. ■

Proposition 15. Avec les notations de la proposition 14, le germe $\underline{\tilde{\Gamma}}$ normalisé de $\underline{\Gamma}$ est isomorphe au germe de $X_{n,q}$ au point singulier.

*Preuve*. Soient $\rho^{**}\colon \Gamma_D^{**} \to E_2^{**}$ comme dans la preuve précédente et $\pi^{**}\colon A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}$ comme dans la section précédente. Soient $V = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid (x, y) \in E_2 \}$ et $\pi_V^{**}$ la restriction de $\pi^{**}$ à $A_{n,q}^{**} \cap V$. Les revêtements $\rho^{**}$ et $\pi_V^{**}$ définissent le même sous-groupe de Fond $(E_2^{**})$. Il existe donc des morphismes $g$ et $h$, inverses l'un de l'autre, rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_{n,q}^{**} \cap V \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[dr, "\pi_V^{**}"'] & \Gamma_D^{**} \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[d, "\rho^{**}"] \\ & E_2^{**} \end{tikzcd}$$

commutatif. Le morphisme $g$ est borné car $\pi$ l'est et $\rho^{**}$ est propre; de même, $h$ est borné. Le raisonnement usuel (voir par exemple celui qui précède la proposition 13) montre que $g$ et $h$ permettent de définir un isomorphisme du normalisé de $\underline{A_{n,q} \cap V}$ avec $\tilde{\Gamma}_D$, c'est-à-dire du germe de $X_{n,q}$ au point singulier avec $\underline{\tilde{\Gamma}}$. ■