III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Si f: $X \to Y$ est la section nulle du fibré π, (de sorte que le A de la proposition 8 est vide), il est alors évident que f ne se relève pas, car cela impliquerait que le revêtement $E \to Y_{\text{sing}} = f(X)$ soit trivial.

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Y} \arrow[d, "\nu_X"] \\
X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Soient n et q des entiers, avec n positif et $q \leqslant n$. Nous noterons $A_{n,q}$ la *surface* $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q}\}$.

Si $n = 1$, les surfaces ainsi définies sont toutes lisses: l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy^{1-q})$ de $\mathbf{C}^3$ applique $A_{1,n}$ sur l'hyperplan d'équation $z = 0$. De même, si $q = n$, l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x - z^n, y, z)$ applique $A_{n,n}$ sur l'hyperplan d'équation $x = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 2$ et $q < n$ sauf mention expresse du contraire.

Si $q = n - 1$, les dérivées partielles du polynôme $z^n - xy^{n-q} = z^n - xy$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, et $A_{n,n-1}$ est lisse en dehors de ce point (donc normale en vertu d'un théorème d'Oka rappelé en II.2). Si $q \leqslant n - 2$, la surface $A_{n,q}$ est lisse en dehors de la droite d'équations $y = z = 0$; nous vérifions ci-dessous que ces points sont effectivement tous singuliers; la proposition 7 montre donc que $A_{n,q}$ n'est pas normale.

Soit $G_{n,q}$ le groupe des isomorphismes de C^2 de la forme $(s, t) \mapsto (\zeta^q s, \zeta t)$ où ζ est une racine n-ième de l'unité; c'est un *groupe cyclique* d'ordre n. Nous noterons $X_{n,q}$ l'*ensemble des orbites*, muni de sa structure canonique d'ensemble analytique normal.

Si $q = 0$, l'ensemble $X_{n,0}$ est lisse: l'application $(s, t) \mapsto (s, t^n)$ passe au quotient et définit un isomorphisme de $X_{n,0}$ sur $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})) \approx \mathbf{C}^2$. Les espaces $X_{n,q}$ et $X_{n,q'}$ sont évidemment identiques si $q' \equiv q$ (modulo n); il suffit donc d'étudier les $X_{n,q}$ pour lesquels $1 \leqslant q < n$ (voir de plus la proposition 13).

Considérons le morphisme $\tilde{\phi}_{n,q}\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ défini par $\tilde{\phi}_{n,q}(s, t) = (s^n, t^n, st^{n-q})$; son image est dans $A_{n,q}$ et il définit par passage au quotient un morphisme $\phi_{n,q}\colon X_{n,q} \to A_{n,q}$. Nous écrirons aussi $\tilde{\phi}$ et ϕ au lieu de $\tilde{\phi}_{n,q}$ et $\phi_{n,q}$.

PROPOSITION 9. Le morphisme ϕ induit un *homéomorphisme* de l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ sur $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid y \neq 0\}$. Si n et q sont premiers entre eux, ϕ lui-même est un homéomorphisme de $X_{n,q}$ sur $A_{n,q}$.

Preuve. Montrons d'abord que $\tilde{\phi}$ est surjectif et que l'image inverse par $\tilde{\phi}$ de tout point autre que l'origine est formée de n points.

Soit $P = (x, y, z) \in A_{n,q}$ avec $y \neq 0$. Choisissons une racine n-ième t de y et posons $s = zt^{-n+q}$. Alors

$$\tilde{\phi}(s, t) = (z^n y^{-n+q}, y, z) = (x, y, z)\,.$$

Soit $(s', t') \in \mathbf{C}^2$ avec $\tilde{\phi}(s', t') = \tilde{\phi}(s, t)$. Il existe des racines n-ièmes ζ et η de l'unité avec $s' = \zeta s$, $t' = \eta t$ et $\zeta\eta^{n-q} = 1$. Par suite $\tilde{\phi}^{-1}(P)$ a n points.

Soit $Q = (x, 0, 0) \in A_{n,q}$ avec $x \neq 0$. Choisissons une racine n-ième s de x. Alors $\tilde{\phi}^{-1}(Q) = \{(\zeta s, 0) \in \mathbf{C}^2 \mid \zeta \in \mathbf{C} \text{ et } \zeta^n = 1\}$ a n points.

Le groupe $G_{n,q}$ agit librement sur $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$, et même sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ lorsque n et q sont premiers entre eux. Il en résulte que la restriction de ϕ à l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ est injective dans tous les cas, et que ϕ lui-même est une bijection si $(n, q) = 1$.

Montrons par exemple que ϕ est un homéomorphisme si $(n, q) = 1$. Pour tout nombre réel positif r, soient K_r l'image dans $X_{n,q}$ de

$$\{(s,t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| \leqslant r \text{ et } |t| \leqslant r\}$$

et L_r l'intersection avec $A_{n,q}$ de

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid |x| \leqslant r^n,\ |y| \leqslant r^n,\ |z| \leqslant r^{1+n-q}\}.$$

La restriction de ϕ à K_r est une bijection continue du compact K_r sur le compact L_r; c'est donc un homéomorphisme. Par suite, ϕ est un homéomorphisme. ■

COROLLAIRE. Si $(n, q) = 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière à l'origine.*

Preuve. Pour tout $r > 0$, le complémentaire de l'origine dans L_r est homéomorphe au complémentaire du point central dans K_r. Il se rétracte donc par déformation sur l'espace lenticulaire que définit l'action de $G_{n,q}$ sur une petite sphère $\mathbf{S}^3$ centrée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. (L'intérieur de L_1 est donc un bon voisinage de l'origine dans $A_{n,q}$ au sens de la section II.1.) En particulier, le groupe fondamental du complémentaire de l'origine dans L_r n'est pas trivial. ■

Remarquons que c'est aussi un corollaire immédiat de la proposition 9 que $(A_{n,q})_{\text{rég}}$ est « connexe à l'origine »: $(L_r)_{r \in \mathbf{R}_+^*}$ est une base de voisinages de l'origine dans $A_{n,q}$ et $L_r \cap (A_{n,q})_{\text{rég}}$ est connexe pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$. D'autre part, il est facile de vérifier que le polynôme $z^n - xy^{n-q}$ est irréductible dans ${}_2\mathcal{O}[z]$, donc aussi dans ${}_3\mathcal{O}$ (voir [8], lemme II.B.5). On vérifie ainsi un cas particulier d'une affirmation énoncée à la section II.1.

PROPOSITION 10. Supposons $q \leqslant n - 2$. Soient $c \in \mathbf{C}^*$ et $Q = (c, 0, 0) \in A_{n,q}$. Alors le voisinage $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\}$ de Q dans $A_{n,q}$ est isomorphe au produit direct du disque $D = \{\xi \in \mathbf{C} \mid |\xi| < 1\}$ et de la courbe plane $\gamma = \{(y, z) \in \mathbf{C}^2 \mid z^n = y^{n-q}\}$.

Preuve. Soit $\rho: D \to \mathbf{C}$ la fonction holomorphe définie par $\rho(\xi)^n = 1 + \xi$ pour tout $\xi \in D$ et $\rho(0) = 1$. Soit d une racine $(n-q)$-ième de $1/c$. Considérons l'application $\alpha: D \times \gamma \to \mathbf{C}^3$ définie par $\alpha(\xi, y, z) = (c(1+\xi), dy, \rho(\xi) z)$. Pour tout $(\xi, y, z) \in D \times \gamma$, on a

$$(\rho(\xi) z)^n - c(1+\xi)(dy)^{n-q} = (1+\xi)(z^n - y^{n-q}) = 0\,.$$

Par suite α définit un morphisme

$$D \times \gamma \to \{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\}\,.$$

qui applique $(0, 0, 0)$ sur Q et d'inverse donné par

$$(x, y, z) \mapsto \left(c^{-1}x - 1, d^{-1}y, (\rho(c^{-1}x - 1))^{-1} z\right). \ ■$$

COROLLAIRE. Supposons $q \leqslant n - 2$. Si $(n, q) \neq 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière en tout point de l'axe* d'équations $y = z = 0$. Si $(n, q) = 1$, c'est une variété topologique au voisinage de Q qui n'est pas normale en Q.

Preuve. Si $(n, q) \neq 1$, la courbe γ a plusieurs branches à l'origine; les intersections de petites sphères centrées à l'origine dans $\mathbf{C}^2$ avec

$\gamma - \{0\}$ ne sont donc pas connexes et $A_{n,q}$ est bien topologiquement singulière en Q. Si $(n, q) = 1$, la surface est une variété topologique au voisinage de Q en vertu du corollaire à la proposition 3. Reste à montrer que $D \times \gamma$ n'est pas normal. Cela résulte de la proposition 7, ou de l'argument direct qui suit.

Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $an + b(n-q) = 1$, et $\psi: D \times \gamma \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\psi(\xi, y, z) = \begin{cases} y^a z^b & \text{si} \quad yz \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = z = 0 \end{cases}$. Alors ψ n'est pas holomorphe, mais ψ^n l'est car $\psi(\xi, y, z)^n = y$. L'anneau des germes en Q de fonctions holomorphes n'est donc pas intégralement clos. ■

Proposition 11. Pour tout couple (n, q) avec $n \geqslant 2$ et $q \leqslant n - 1$, le morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$ est la normalisation de $A_{n,q}$. C'est un isomorphisme si et seulement si $q = n - 1$.

Preuve. Cela résulte de ce qui précède et du théorème de Cartan rappelé à la section II.1. ■

On pourrait montrer que les surfaces $A_{n,q}$, $A_{n,q-n}$, $A_{n,q-2n}$, ... sont non isomorphes deux à deux; par suite, $X_{n,q}$ est la normalisation d'une infinité d'ensembles analytiques distincts.

III.2. Les discriminants des $A_{n,q}$ et les ouverts $A_{n,q}^{**}$

Soient à nouveau n et q des entiers avec $n \geqslant 2$ et $q < n$. Notons $F \in {}_2\mathcal{O}[z]$ le polynôme $z^n - xy^{n-q}$. A un facteur numérique près, son discriminant est une puissance de xy^{n-q}. Soient en effet $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines, qui sont dans une extension convenable du corps des quotients de ${}_2\mathcal{O}$; alors

$$\mathrm{Dis}(F) = \prod \frac{\partial F}{\partial z}(\lambda_j) = \prod n\lambda_j^{n-1} = \left(\prod n\lambda_j^n\right)\left(\prod \lambda_j\right)^{-1}$$

$$= n^n (xy^{n-q})^n (-1)^n F(x, y, 0)^{-1} = (-1)^{n-1} n^n (xy^{n-q})^{n-1}$$

(tous les produits étant sur j de 1 à n). Comme à la section II.2, désignons par $\pi: A_{n,q} \to \mathbf{C}^2$ la restriction à $A_{n,q}$ de la projection canonique $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Nous noterons $\mathbf{C}^{**}$ l'espace $\mathbf{C}^2$ privé du lieu discriminant $\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy = 0\}$ et $A_{n,q}^{**}$ l'image inverse par π de $\mathbf{C}^{**}$. La proposition 7 ou un examen direct montre que π se restreint en un revêtement holomorphe à n feuilles

$$\pi^{**}: A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}.$$