III.2. Les discriminants des $A_{n,q}$ et les ouverts $A_{n,q}^{\star\star}$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

$\gamma - \{0\}$ ne sont donc pas connexes et $A_{n,q}$ est bien topologiquement singulière en Q. Si $(n, q) = 1$, la surface est une variété topologique au voisinage de Q en vertu du corollaire à la proposition 3. Reste à montrer que $D \times \gamma$ n'est pas normal. Cela résulte de la proposition 7, ou de l'argument direct qui suit.

Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $an + b(n-q) = 1$, et $\psi: D \times \gamma \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\psi(\xi, y, z) = \begin{cases} y^a z^b & \text{si} \quad yz \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = z = 0 \end{cases}$. Alors ψ n'est pas holomorphe, mais ψ^n l'est car $\psi(\xi, y, z)^n = y$. L'anneau des germes en Q de fonctions holomorphes n'est donc pas intégralement clos. ■

Proposition 11. Pour tout couple (n, q) avec $n \geqslant 2$ et $q \leqslant n - 1$, le morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$ est la normalisation de $A_{n,q}$. C'est un isomorphisme si et seulement si $q = n - 1$.

Preuve. Cela résulte de ce qui précède et du théorème de Cartan rappelé à la section II.1. ■

On pourrait montrer que les surfaces $A_{n,q}$, $A_{n,q-n}$, $A_{n,q-2n}$, ... sont non isomorphes deux à deux; par suite, $X_{n,q}$ est la normalisation d'une infinité d'ensembles analytiques distincts.

III.2. Les discriminants des $A_{n,q}$ et les ouverts $A_{n,q}^{**}$

Soient à nouveau n et q des entiers avec $n \geqslant 2$ et $q < n$. Notons $F \in {}_2\mathcal{O}[z]$ le polynôme $z^n - xy^{n-q}$. A un facteur numérique près, son discriminant est une puissance de xy^{n-q}. Soient en effet $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines, qui sont dans une extension convenable du corps des quotients de ${}_2\mathcal{O}$; alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Dis}(F) &= \prod \frac{\partial F}{\partial z}(\lambda_j) = \prod n\lambda_j^{n-1} = \left(\prod n\lambda_j^n\right)\left(\prod \lambda_j\right)^{-1} \\ &= n^n (xy^{n-q})^n (-1)^n F(x, y, 0)^{-1} = (-1)^{n-1} n^n (xy^{n-q})^{n-1} \end{aligned}$$

(tous les produits étant sur j de 1 à n). Comme à la section II.2, désignons par $\pi: A_{n,q} \to \mathbf{C}^2$ la restriction à $A_{n,q}$ de la projection canonique $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Nous noterons $\mathbf{C}^{**}$ l'espace $\mathbf{C}^2$ privé du lieu discriminant $\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy = 0\}$ et $A_{n,q}^{**}$ l'image inverse par π de $\mathbf{C}^{**}$. La proposition 7 ou un examen direct montre que π se restreint en un revêtement holomorphe à n feuilles

$$\pi^{**}: A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}.$$

Nous notons ci-dessous Fond (Y) le groupe fondamental d'un espace topologique Y; nous n'aurons à considérer que des cas où ce groupe est abélien, ce qui nous autorise à ne pas marquer de point base sur Y.

Le groupe fondamental de $\mathbf{C}^{**} = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ est le groupe abélien libre sur deux générateurs représentés par les lacets

$$\begin{cases} [0,1] \to \mathbf{C}^* \\ t \mapsto (\underline{e}(t), 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} [0,1] \to \mathbf{C}^* \\ t \to (1, \underline{e}(t)) \end{cases}$$

avec $\underline{e}(t) = \exp(i2\pi t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Nous identifierons désormais Fond $(\mathbf{C}^{**})$ et ces deux générateurs à $\mathbf{Z}^2$ et sa base canonique.

Proposition 12. Le groupe fondamental de $A_{n,q}^{**}$ est abélien libre sur deux générateurs. Son image dans $\mathbf{Z}^2$ = Fond $(\mathbf{C}^{**})$ définie par le revêtement π^{**} est engendrée par $(n, 0)$ et $(q, 1)$.

Preuve. L'application φ de $\{u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid uv \neq 0\}$ dans $A_{n,q}^{**}$ définie par $\varphi(u, v) = (u^n v^q, v, uv)$ est un isomorphisme d'inverse $(x, y, z) \mapsto (z/y, y)$. Donc Fond $(A_{n,q}^{**})$ est bien isomorphe à $\mathbf{Z}^2$, et son image par π^{**} dans Fond $(\mathbf{C}_{xy}^{**})$ est aussi l'image de $\mathbf{Z}^2$ = Fond $(\mathbf{C}_{uv}^{**})$ dans $\mathbf{Z}^2$ = Fond $(\mathbf{C}_{xy}^{**})$ induite par

$$\begin{cases} \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid uv \neq 0\} \to \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy \neq 0\} \\ \qquad (u, v) \mapsto (u^n v^q, v) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Remarquons que les applications $g : \begin{cases} A_{n,q-n}^{**} \to A_{n,q}^{**} \\ (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, \eta, \zeta/\eta) \end{cases}$ et $h : \begin{cases} A_{n,q}^{**} \to A_{n,q-n}^{**} \\ (x, y, z) \mapsto (x, y, yz) \end{cases}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Continuons à noter $X_{n,q}$ [respectivement $X_{n,q-n}$] l'espace normalisé de $A_{n,q}$ [resp. $A_{n,q-n}$], mais « oublions » provisoirement sa description comme quotient de $\mathbf{C}^2$ par $G_{n,q}$; comme illustration de la section II.3, nous allons montrer que $X_{n,q}$ et $X_{n,q-n}$ sont isomorphes.

Soit $\phi: X_{n,q-n} \to A_{n,q-n}$ la normalisation; on peut considérer g comme une application de $\phi^{-1}(A_{n,q-n}^{**})$ dans $A_{n,q}^{**}$. Elle est évidemment bornée, et se prolonge en $\tilde{g}: X_{n,q-n} \to A_{n,q}$. La proposition 8 affirme que $\tilde{g}$ se relève en $G: X_{n,q-n} \to X_{n,q}$. De même h (ou son prolongement évident $A_{n,q} \to A_{n,q-n}$) se relève en $H: X_{n,q} \to X_{n,q-n}$. Comme G et H sont inverses l'un de l'autre une fois restreints aux ouverts non vides $U = \phi^{-1}(A_{n,q-n}^{**})$ et $G(U)$, on a $G = H^{-1}$.

La proposition suivante montre qu'il y a d'autres isomorphismes entre les $X_{n,q}$.

PROPOSITION 13. Pour tout entier positif d, les espaces $X_{dn,dq}$ et $X_{n,q}$ sont isomorphes.

Première preuve. L'application $g: \begin{cases} A^{**}_{dn,dq} \to A^{**}_{n,q} \\ (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\zeta^n \eta^{-n+q}, \eta, \zeta) \end{cases}$ est un isomorphisme d'inverse h décrit par $h(x, y, z) = (x^d, y, z)$. Le même argument que ci-dessus montre que g, considérée comme application de $\phi_{dn,dq}{}^{-1}(A^{**}_{dn,dq})$ dans $A^{**}_{n,q}$, se relève et se prolonge en $G: X_{dn,dq} \to X_{n,q}$ et que h définit de même $H: X_{n,q} \to X_{dn,dq}$ avec $G = H^{-1}$.

Seconde preuve. Soit $\tilde{\varphi}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ défini par $\tilde{\varphi}(s, t) = (s, t^d)$. Pour tout $k \in \{0, 1, ..., dn - 1\}$, considérons $\underline{e}(k/dn)$ dans $G_{dn,dq}$ et $\underline{e}(k/n)$ dans $G_{n,q}$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\big(\underline{e}(k/dn)(s, t)\big) &= \big(\underline{e}(k/dn)^{dq} s, \big(\underline{e}(k/dn)\, t\big)^d\big) \\ &= \big(\underline{e}(k/n)^q s, \underline{e}(k/n)\, t^d\big) = \underline{e}(k/n)\, \tilde{\varphi}(s, t) \end{aligned}$$

et $\tilde{\varphi}$ définit un morphisme $\varphi: X_{dn,dq} \to X_{n,q}$. Il est évident que $\tilde{\varphi}$ et φ sont surjectifs.

Montrons que φ est injectif. Soient (u, v) et (s, t) des points de $\mathbf{C}^2$ dont les images par $\tilde{\varphi}$ sont congrues modulo $G_{n,q}$. Il existe donc $k \in \{0, 1, ..., n - 1\}$ tel que $(u, v^d) = \big(\underline{e}(k/n)^q s,\ \underline{e}(k/n)\, t^d\big)$. Par suite, il existe aussi $j \in \{0, 1, ..., d - 1\}$ avec $v = \underline{e}(j/d)\, \underline{e}(k/dn)\, t$. La transformation $\underline{e}\big((jn+k)/dn\big)$ de $G_{dn,dq}$ applique alors (s, t) sur

$$\begin{aligned} &\big(\underline{e}\big((jn+k)/dn\big)^{dq} s, \underline{e}\big((jn+k)/dn\big)\, t\big) \\ &= \big(\underline{e}(jq)\, \underline{e}(kq/n)\, s, \underline{e}(j/d)\, \underline{e}(k/dn)\, t\big) = (u, v)\,, \end{aligned}$$

de sorte que (s, t) et (u, v) sont congrus modulo $G_{dn,dq}$.

Par suite φ est bijectif. On peut montrer comme dans la preuve de la proposition 9 que φ est un homéomorphisme. Comme φ^{-1} est un morphisme sauf a priori au point singulier et comme $X_{n,q}$ est normal, φ^{-1} est un morphisme en tout point et φ est un isomorphisme. ■

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'automorphisme $(u, v) \mapsto (v, u)$ de $\mathbf{C}^2$ définit, lorsque $qq' \equiv 1$ (modulo n), un isomorphisme de $X_{n,q}$ sur $X_{n,q'}$. On peut montrer qu'il n'existe *pas d'autres isomorphismes* que ceux écrits jusqu'ici: si $X_{n,q}$ et $X_{n',q'}$ sont isomorphes avec $(n, q) = (n', q') = 1$, alors $n = n'$ et $q = q'$ ou $qq' \equiv 1$ (modulo n); voir [21], théorème 2.

Si $q = n - 1$, nous avons vu que ϕ est un isomorphisme de $X_{n,n-1}$ sur $A_{n,n-1}$; en d'autres termes que la *dimension de plongement* de la singularité normale $X_{n,n-1}$ est 3. On sait calculer en général la dimension de plongement de $X_{n,q}$: si $(n, q) = 1$ et avec les notations de la section IV.2, elle vaut $3 + \sum_{k=1}^{s} (b_k - 2)$. En particulier, la réciproque à l'assertion ci-dessus est aussi vraie: si $(n, q) = 1$ et si $X_{n,q}$ se plonge dans $\mathbf{C}^3$, alors $q = n - 1$. Voir [22], fin du § 3.

III.3. Classification

Soit Γ un germe de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$. Reprenons les notations de la section II.2; supposons que le lieu discriminant exhibe une singularité consistant en un point double avec croisement normal — en d'autres termes, supposons qu'on puisse choisir les coordonnées de telle sorte que $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid xy = 0\}$. Nous noterons D_2^{**} l'espace $D_2 - \gamma_D$ et Γ_D^{**} son image inverse par π; la projection se restreint en un revêtement à n feuilles $\pi^{**}: \Gamma_D^{**} \to D_2^{**}$. On identifie comme à la section précédente le groupe fondamental de D_2^{**} à $\mathbf{Z}^2$.

Proposition 14. Il existe un polycylindre E_2 dans $\mathbf{C}^2$, un morphisme $\rho^{**}: \Gamma_D^{**} \to E_2^{**}$ et des entiers n, q avec $0 \leqslant q < n$ et $(n, q) = 1$ tels que ρ^{**} induise une injection de Fond (Γ_D^{**}) sur le sous-groupe de Fond $(E_2^{**}) = \mathbf{Z}^2$ engendré par $(n, 0)$ et $(q, 1)$.

Preuve. Soit G l'image de Fond (Γ_D^{**}) dans $\mathbf{Z}^2$ définie par π^{**}. C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{Z}^2$ car π^{**} est un revêtement fini. Par suite G contient des éléments de la forme $(k, 0)$; soit

$$a = \inf\{\, |k| \mid (k, 0) \in G \quad \text{et} \quad k \neq 0 \}\,.$$

On peut choisir un vecteur (b, c) formant avec $(a, 0)$ une base de G, tel que $0 \leqslant b < a$ et $c > 0$.

Soit d le plus grand commun diviseur de a et b (avec $d = a$ si b est nul). Soient $E_2 = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid (u^d, v^c) \in D_2\}$ et $E_2^{**} = \{(u, v) \in E_2 \mid uv \neq 0\}$.