Le schéma de Dynkin, qui a un sommet muni de l'entier $b_k = -\langle \sigma_k \mid \sigma_k \rangle$ pour chaque composante irréductible σ_k de la fibre exceptionnelle, et une arête liant les sommets définis par σ_j et σ_k si $\langle \sigma_j \mid \sigma_k \rangle \neq 0$, est

$$\overset{b_1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{b_2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{b_3}{\bullet}\!\!-\, \cdots \,-\!\!\overset{b_s}{\bullet} \qquad\qquad (\bullet = P^1)$$

Si $q = n - 1$, la matrice $\langle \sigma_j \mid \sigma_k \rangle_{1 \leq j,k \leq s}$ est la matrice de Cartan A_{n-1}.

Preuve. L'existence de $\tilde{\rho}$ résulte de la proposition 8; les autres affirmations de ce qui précède. ■

IV.4. Relation avec les éclatements

Soit $\pi : S \to \mathbf{C}^2$ l'éclatement de $\mathbf{C}^2$ à l'origine, comme en I.3. Considérons ici $T = \mathbf{C} \times S$ et $\tau : T \to \mathbf{C}^3$ l'application id $\times\, \pi$ qui est l'*éclatement de C^3 le long de la droite* d'équations $y = z = 0$. On munit T comme en I.3 d'un atlas à deux cartes $\psi_j : T_j \to \mathbf{C}^3$ ($j = 0, 1$), avec les changements de cartes donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} = \psi_0(T_0 \cap T_1) \to \psi_1(T_0 \cap T_1) = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ (x, y, z) \mapsto (x, 1/y, yz) \end{cases}$$

et par l'isomorphisme inverse. L'application τ s'écrit dans les cartes

$$\tau_0 : \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_0(T_0) \to \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, z, yz) \end{cases}$$

et

$$\tau_1 : \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_1(T_1) \to \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, yz, z) \end{cases}$$

La transformée stricte de $A_{n,q} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q} \}$ apparaît dans une carte comme la surface lisse

$$\{ (x, y, z) \in \psi_0(T_0) \mid y^n z^q = x \}$$

et dans l'autre comme

$$\{ (x, y, z) \in \psi_1(T_1) \mid z^q = xy^{n-q} \} \approx A_{q, 2q-n}.$$

Au niveau des normalisés, l'éclatement permet donc de « remplacer » $X_{n,q}$ par $X_{q,\lambda}$ avec $0 < \lambda < q$ et $\lambda = (2+r)\, q - n$ pour un entier positif convenable r (nous avons utilisé ici les remarques qui précèdent la proposition 13). Avec les notations de la section 2, on a précisément $\lambda = \lambda_2$ et $2 + r = b_1$.

En cherchant à itérer l'argument jusqu'à trouver une surface lisse, on aurait précisément à considérer les suites numériques de la section 2.

V. L'ICOSAÈDRE ET LES SOUS-GROUPES FINIS NON CYCLIQUES DE $SU(2)$

V.1. Le cas de l'icosaedre

Soient $h\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to P^1 = \mathbf{S}^2$ la projection canonique et $\delta\colon SU(2) \to SO(3)$ le revêtement universel (à deux feuillets) du groupe des automorphismes analytiques isométriques de P^1 (= du groupe des rotations de la sphère). Soient $\underline{G}$ le sous-groupe de $SO(3)$ des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier inscrit dans $\mathbf{S}^2$, et $G = \delta^{-1}(\underline{G})$; nous noterons encore δ la projection canonique de G sur $\underline{G}$. Le groupe $\underline{G}$ a 60 éléments; ses orbites sur $\mathbf{S}^2$ ont aussi 60 points à trois exceptions près qui sont

l'orbite $\underline{\mathscr{A}} = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{12}\}$ des sommets de l'icosaèdre
l'orbite $\underline{\mathscr{B}} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ des barycentres de ses faces
l'orbite $\underline{\mathscr{C}} = \{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{30}\}$ des milieux de ses arêtes.

Le groupe G agit linéairement dans $\mathbf{C}^2$; ses orbites ont toutes 120 points, à la seule exception de l'origine.

Le quotient $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G$ est un ensemble analytique, normal par le théorème de Cartan; il a un unique point non lisse, que nous noterons x_0 et qui est l'image canonique de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Nous renvoyons à [12], chapitre II, § 13 et/ou à [15], théorème 4.5 pour le résultat classique suivant (dont nous ne faisons pas usage ci-dessous): il existe une application polynômiale $\tilde{\phi}\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ qui fournit par passage au quotient un isomorphisme ϕ de X_{ico} sur la surface de $\mathbf{C}^3$ à singularité unique

$$A_{ico} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3\}.$$