

V.2. Le cas des autres polyèdres réguliers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

où les points représentent un diviseur dont le support est disjoint de $|\sigma_0|$. De l'équation $\langle D_{\tilde{F}} | \sigma_0 \rangle = 0$, on déduit alors

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 50 + 40 + 30 = 0$$

et la proposition. ■

Remarques. On aurait pu partir d'un polynôme φ' invariant par G et nul sur \mathcal{B} . On aurait alors obtenu les diviseurs associés à η^{12} sur $M_{10,8}$, $\xi\eta^{20}$ sur $M_{6,4}$ et η^{30} sur $M_{4,2}$, d'où un diviseur associé à une fonction F' de la forme

$$D_{F'} = 60 \sigma_0 + 48 \sigma_{4,\alpha} + 42 \sigma_{2,\beta} + 30 \sigma_\gamma + \dots$$

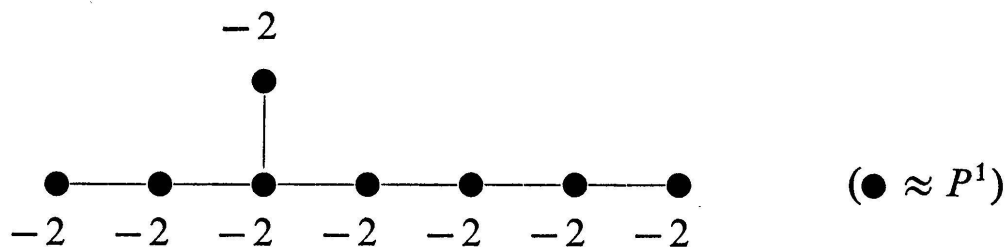
et une équation

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 48 + 42 + 30 = 0$$

On aurait enfin pu partir d'un polynôme φ'' nul sur \mathcal{C} , d'où des diviseurs associés à η^{12} sur $M_{10,8}$, η^{20} sur $M_{6,4}$ et $\xi\eta^{30}$ sur $M_{4,2}$ et une équation

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 48 + 40 + 32 = 0.$$

COROLLAIRE. Le schéma de Dynkin associé à la résolution $\pi_{G\rho_i}: M_{ico} \rightarrow X_{ico}$ est



et la matrice d'intersection associée est la matrice de Cartan E_8 .

V. 2. LE CAS DES AUTRES POLYÈDRES RÉGULIERS •

Nous noterons dans cette section G_{ico} [respectivement G_{oct} , $G_{tét}$, D_n] le sous-groupe de $SO(3)$ des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier [resp. octaèdre régulier, tétraèdre régulier, polygone plan régulier à $n \geq 3$ sommets] inscrit dans S^2 et G_{ico} [resp. G_{oct} , $G_{tét}$, D_n] son image

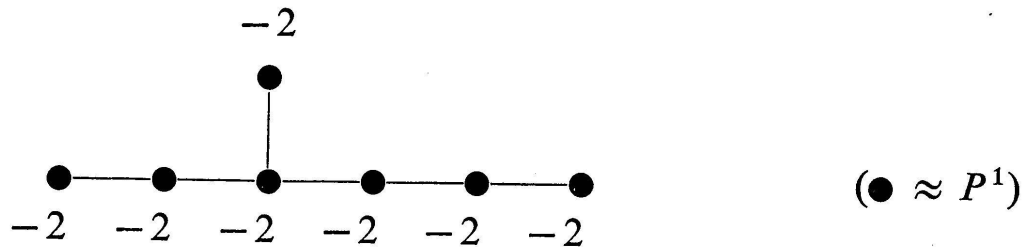
inverse par δ^{-1} dans $SU(2)$. La section précédente est l'étude de l'espace $X_{ico} = \mathbb{C}^2/G_{ico}$, qui a un unique point singulier et qu'on a dit être isomorphe à la surface

$$A_{ico} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3\}.$$

Soit X_{oct} le quotient de \mathbb{C}^2 par G_{oct} . Il est isomorphe à la surface

$$A_{oct} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^2 = x(x^2 - y^3)\}.$$

On peut en construire, comme pour le cas précédent, une désingularisation $M_{oct} \rightarrow X_{oct}$. Les calculs du chapitre IV relatifs à $X_{8,6}$, $X_{6,4}$ et $X_{4,2}$ et un calcul analogue à celui de la proposition 18 montrent que le diagramme de Dynkin associé est



et que la matrice d'intersection est la matrice de Cartan E_7 .

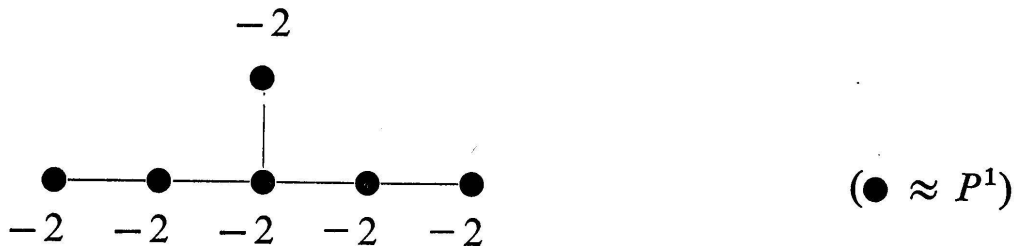
Contrairement à G_{ico} , le groupe G_{oct} n'est pas parfait. Son groupe dérivé est $G_{tét}$ et son abélianisé \mathbb{Z}_2 . Le quotient $X_{tét}$ de \mathbb{C}^2 par $G_{tét} = (G_{oct}, G_{oct})$ est isomorphe à la surface

$$A_{tét} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^4 = x^2 + y^3\}.$$

(Pour l'isomorphisme, voir [12], chap. II, § 12 et [15], § 4.) On trouve aussi

$$A_{tét} = \{(x', y', z') \in \mathbb{C}^3 \mid y'^3 = x'(x' - z'^2)\},$$

ce qui correspond au changement de coordonnées $x = x' - z'^2/2, y = -y', z = z'/2$. On obtient cette fois $M_{tét} \rightarrow X_{tét}$, où $M_{tét}$ se fabrique en recollant deux copies de $M_{6,4}$ et une copie de $M_{4,2}$. Le diagramme de Dynkin associé est



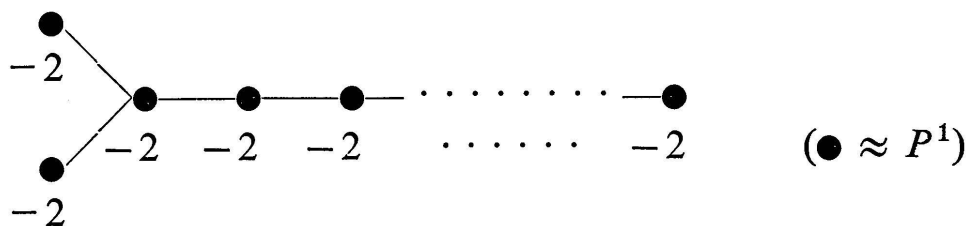
et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan E_6 .

L'analogie du théorème A de la section IV.3 s'énonce donc comme suit.

THÉORÈME E. Les désingularisations des ensembles analytiques à singularité unique C^2/G , où G est l'un des trois groupes polyédraux binaires G_{ico} , G_{oct} , $G_{tét}$, définissent les schémas de Dynkin E_8 , E_7 et E_6 .

Le dernier théorème résume la situation qu'on obtiendrait en étudiant le cas des groupes diédraux binaires (voir [1]).

THÉORÈME D. Soient $n \geq 3$ et X_n l'ensemble analytique quotient de C^2 par le groupe diédral binaire D_n (à $4n$ éléments). On obtient une désingularisation $M_n \rightarrow X_n$, où M_n se fabrique en recollant deux copies de $M_{4,2}$ et une copie de $X_{2n,2}$. Le schéma de Dynkin associé est



et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan D_n .

On trouvera des renseignements complémentaires dans bien d'autres articles parmi lesquels nous citerons [10] et [20].

RÉFÉRENCES

- [1] BEHNKE, K. und O. RIEMENSCHNEIDER. Diedersingularitäten. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 47 (1978), pp. 210-227 et Infinitesimale Deformationen von Diedersingularitäten. *Manuscripta* 20 (1977), pp. 377-400.
- [2] BOCHNER, S. and W. T. MARTIN. *Several complex variables*. Princeton University Press 1948.
- [3] CARTAN, H. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic geometry and algebraic topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*, pp. 90-102, Princeton University Press 1957.
- [4] DURFEE, A. H. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *L'Enseignement math.* 25 (1979), pp. 131-163.
- [5] FISCHER, G. *Complex analytic geometry*. Springer Lecture Notes 538 (1976).
- [6] GODEMENT, R. *Cours d'algèbre*. Hermann 1963.
- [7] GUENOT, J. et R. NARASIMHAN. *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*. *L'Enseignement math.* 21 (1975), pp. 123-328.
- [8] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall 1965.
- [9] HIRZEBRUCH, F. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* 126 (1953), pp. 1-22.