# 2. RÉSULTANTS

# SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

par Claude WEBER

## 1. INTRODUCTION

Dans [2] et dans [3], R. H. Fox a donné une formule exprimant l'ordre de l'homologie d'un revêtement cyclique de $S^3$, ramifié sur un nœud. L'exposition de Fox a été reprise par L. P. Neuwirth dans [7]. Comme l'a remarqué M. A. Gordon, [4] p. 17, la démonstration proposée par Fox demande quelques aménagements. Nous proposons ici une démonstration de cette formule, basée sur les deux principes suivants:

1. La formule est une conséquence facile de la définition du résultant de deux polynômes, dans le cas où l'homologie du revêtement cyclique infini du complémentaire du nœud est somme directe de modules cycliques.

2. Un raisonnement basé sur un argument dû à D. W. Sumners permet de se ramener au cas précédent.

Le fait qu'un nœud ne satisfait pas nécessairement les conditions énoncées dans 1 est connu des spécialistes du sujet. Nous revenons sur ce point au § 5.

Je tiens à remercier Daniel Lines dont les connaissances sur les résultants m'ont été fort utiles.

## 2. RÉSULTANTS

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques faits classiques concernant les résultants, qui nous seront nécessaires par la suite.

Soit $R$ un anneau intègre et soient $f$ et $g$ deux polynômes à coefficients dans $R$:

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$$
$$g(t) = b_m t^m + \dots + b_0 .$$

Par définition, le résultant de $f$ et $g$, noté Rés $(f, g)$, est égal au déterminant de la $(m+n)$-matrice carrée:

$$\begin{bmatrix}
a_n & & & & b_m & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & \cdot & b_m & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_1 & & & b_m \\
 & & & \vdots & & & & \vdots \\
a_0 & & & & b_0 & b_1 & & \\
 & a_0 & & & & b_0 & \ddots & \\
 & & & a_0 & & & & b_0
\end{bmatrix}$$

Théorème.

a) Rés $(f, g) = 0$ si et seulement si $a_n = 0 = b_m$ ou si $f$ et $g$ ont une racine commune (dans une clôture algébrique $\bar{K}$ du corps des fractions $K$ de $R$).

b) Rés $(f, g) = a_n{}^m b_m{}^n \prod_{i,j} (x_i - y_j)$ .

si $a_n \neq 0 \neq b_m$ où: $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sont les racines de $f$ dans $\bar{K}$ et $\{y_1, \ldots, y_m\}$ celles de $g$.

Corollaire. Rés $(f, g_1 \,.\, g_2) =$ Rés $(f, g_1)$ . Rés $(f, g_2)$ (multiplicativité du résultant).

Pour une démonstration, voir [10], pp. 102-106.

Désignons par $T$ le groupe cyclique infini, noté multiplicativement, et de générateur $t \in T$. Soit $RT$ l'anneau du groupe $T$ sur $R$. Soit $\alpha$

$= (P_1, ..., P_r)$ un idéal de $RT$, engendré par $P_1, ..., P_r \in RT$. $(P_i \neq 0)$. Comme $\pm t^i$ est une unité de $RT$, on ne restreint pas la généralité en supposant que les $P_i(t)$ sont de la forme:

$$P(t) = a_0 + \ldots + a_n t^n \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0,\ n \geqslant 0\,.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons en général que les éléments de $RT$ que nous considérons satisfont cette condition (*). Nous dirons qu'un tel polynôme est biunitaire si $a_0$ et $a_n$ sont des unités de $R$.

Proposition. Soient $f$ et $g \in \mathbf{Z}T$ deux polynômes non nuls et sans racine commune (dans $\overline{\mathbf{Q}}$). Supposons $f$ biunitaire.

Alors $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ est un groupe fini et son ordre est égal à $|\operatorname{Rés}(f, g)|$.

*Remarques.* 1) Bien sûr, $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ est aussi un $\mathbf{Z}T$-module. Mais dans la suite, nous le considérerons comme un groupe abélien pour calculer son ordre, d'où la terminologie adoptée.

2) Dire que $f$ et $g$ sont sans racine commune revient à dire qu'ils sont premiers entre eux dans $\mathbf{Q}T$. Comme $\mathbf{Z}T$ n'est pas principal, cela signifie (seulement) qu'il existe des éléments $k$ et $h \in \mathbf{Z}$ tels que

$$fk + gh = n \in \mathbf{Z}\,,\ n \neq 0\,.$$

En général, $n \neq \pm 1$. En fait, soit $e(f, g)$ le plus petit entier strictement positif $e$ tel qu'il existe $k$ et $h$ pour que

$$fk + gh = e\,.$$

Alors $e(f, g)$ est l'exposant du groupe $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ sans même qu'il soit nécessaire de supposer $f$ biunitaire. Si c'est le cas, $\operatorname{Rés}(f, g)$ et $e(f, g)$ ont mêmes diviseurs premiers, et rendent ainsi souvent les mêmes services. En bien des occasions, l'exposant est plus facile à calculer que l'ordre.

3) Une hypothèse du genre « biunitaire » est nécessaire, comme le montre l'exemple $f(t) = 3t - 1$ $g(t) = 3t - 2$. En ce cas $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ $= \{0\}$ car $e(f, g) = 1$, mais $|\operatorname{Rés}(f, g)| = 3$.

*Preuve de la proposition.* Puisque $f$ est biunitaire, le $\mathbf{Z}T$-module $\mathbf{Z}T \big/ (f)$ est isomorphe au $\mathbf{Z}T$-module

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbf{Z}\, e_i$$

où

$$t(e_i) = e_{i+1},\, i = 0, 1, \ldots, n-2\,,$$

$$t(e_{n-1}) = -\frac{1}{a_n}(a_{n-1}\, e_{n-1} + \ldots + a_0)\,.$$

Comme $\left| -\dfrac{a_0}{a_n} \right| = 1$, $t$ agit bien par un isomorphisme de $\mathcal{M}$. Notons $\Phi\colon \mathbf{Z}T \big/ (f) \to \mathcal{M}$ l'isomorphisme donné par $1 \to e_0$. Puisque

$$\mathbf{Z}T \big/ (f, g) \approx \mathbf{Z}T \big/ (f) \big/ (\bar{g})$$

où $\bar{g}$ désigne l'image de $g$ dans $\mathbf{Z}T \big/ (f)$, on déduit que $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{M}$ par le sous-module $\mathcal{N}$ engendré par $\Phi(\bar{g})$.

*Affirmation :* Comme groupe abélien, $\mathcal{N}$ est engendré par

$$\Phi(\bar{g}), \Phi(t\bar{g}), \ldots, \Phi(t^{n-1}\bar{g})\,.$$

En effet, $\mathcal{N}$ est certainement engendré par les $\Phi(t^j \bar{g})$ pour $j \in \mathbf{Z}$. Mais

$$f \cdot g = (a_n t^n + \ldots + a_0) \cdot g \quad \text{et} \quad \Phi(\bar{f} \cdot \bar{g}) = 0$$

Donc

$$\Phi(t^n \cdot \bar{g}) = -\frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, \Phi(t^j \bar{g})\,.$$

Considérons maintenant les deux polynômes

$$f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$$
$$g(t) = b_m t^m + \ldots + b_0$$

avec $f$ biunitaire et envisageons la $(m+n)$-matrice carrée dont le déterminant est Rés $(f, g)$. Par soustractions répétées des colonnes $a$ aux colonnes $b$, on obtient, puisque $|a_n| = 1$, une matrice:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \qquad m \text{ colonnes} \qquad\qquad & \qquad\qquad n \text{ colonnes} \qquad \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
a_n & & & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
& & a_n & & & \\ \hline
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_0 & \vdots & & \Phi(f^{n-1}\bar{g}) & \cdots & \Phi(\bar{g}) \\
& a_0 & & & & \\
& & a_0 & \vdots & & \vdots
\end{array}\right]
\end{array}$$

Dans la matrice précédente, $\Phi(f^j\bar{g})$ désigne un vecteur colonne dans la base $(e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0)$.

Comme $|a_n| = 1$, le groupe ainsi présenté est isomorphe à $\mathcal{M}/\mathcal{N}$.

Le déterminant de cette dernière matrice est égal, en valeur absolue, d'une part à l'ordre du groupe $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ et d'autre part, par construction, à Rés $(f, g)$. C.q.f.d.

## 3. Revêtements cycliques de $S^3$, ramifiés sur un nœud

Soit $K$ un nœud apprivoisé dans $S^3$. Désignons par $X$ le complémentaire du nœud $S^3 - K$, par $X_\infty$ le revêtement cyclique infini de $X$, par $X_m$ le revêtement cyclique à $m$ feuilles de $X$, par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à $m$ feuilles de $S^3$, ramifié sur $K$.